2016年第17屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第47屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2016 年 1 月 30 日

考試時間：13:30-16:30，共三小時

＜＜注意事項＞＞

1、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。

2、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。

3、可使用無程式之掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t為時間，x為任意物理量)

1. $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ ， $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$

2. $\displaystyle\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}$ 、$m\neq-1$； $\dfrac{d}{dx}x^m=m\cdot x^{m-1}$

3. $\dfrac{d\cos x}{dx}=-\sin x$， $\dfrac{d\sin x}{dx}=\cos x$ ，

   $\displaystyle\int \sin x\,dx=-\cos x$ ， $\displaystyle\int \cos x\,dx=\sin x$

4. 當$|x|\ll 1$，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\dfrac{x}{2}$ ，

5. 當$x\ll 1$，$\sin x\approx x$， $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2}$ 。

2016年第17屆亞洲物理及第47屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、水平桌面上半圓柱的簡諧運動

將一個半徑為R、質量為M的半圓柱置於水平桌面上，圓柱的平面朝上並與水平呈一小傾角，如右圖 1。今將該圓柱由靜止釋放，且初始時圓柱的平面傾角極小，因此圓柱的運動可以用簡諧運動來近似。已知圓柱的質心到圓柱圓心線的垂直距離為$\frac{4R}{3\pi}$、圓柱相對於質心的轉動慣量為I、重力加速度為g。回答以下三小題：

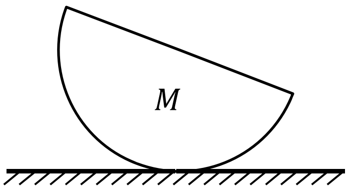


圖 1

(a) 若桌面為光滑，估計該週期運動的週期。(5 分)

(b) 若桌面具有摩擦力，且該半圓柱自靜止釋放後只在桌面上作純滾動，假設半圓柱的初始水平傾角為θ_0，則其最大的角速度為何值？ (10 分)

(c) 承上題，若要使半圓柱在桌面上沒有滑動，則桌面的靜摩擦係數至少要大於多少？ (10 分)

二、 模擬太空船彈跳登陸

一力學裝置是由理想彈簧連接兩質量相等的上、下方塊所構成。已知一個方塊的質量$m = 2.0\text{kg}$,彈簧的力常數為$k = 100\text{N/m}$。此裝置以垂直地面的狀態下落，此時彈簧保持自然長度,如圖 2 所示；當下方塊恰撞擊地面時，裝置的瞬間速率為$v_0 = 5.0\text{m/s}$。假設下方塊撞擊地面的過程為一完全非彈性碰撞，即下方塊於碰撞後靜止於地面上，但並未黏著，則

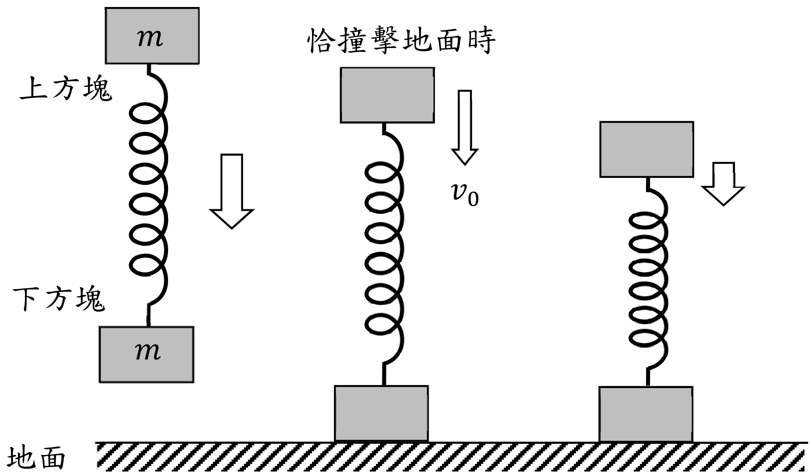


圖 2

(a) 從下方塊碰撞地面時算起，上方塊第一次速度為 0 的時間為何？(7 分)

(b) 當上方塊第一次反彈後，如圖 3 所示。若自下方塊剛剛離地的時間算起，在t時刻上方塊的速度為何？上方塊上升至最高點的時間為何？下方塊再次撞擊地面時的時間為何？(18 分)

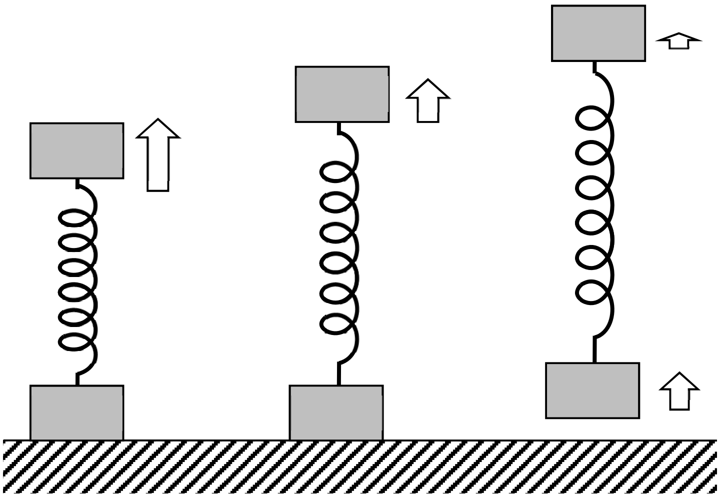


圖 3

三、**(A)帶電質點在均勻電荷分布空間中的運動**

在一個三度空間中，如圖 4 所示，在x軸的$-d \le x \le d$區域內有均勻分布的電荷(O 為原點)，其體電荷密度為$\rho(\rho > 0)$，其他區域皆為真空，回答下列各題。

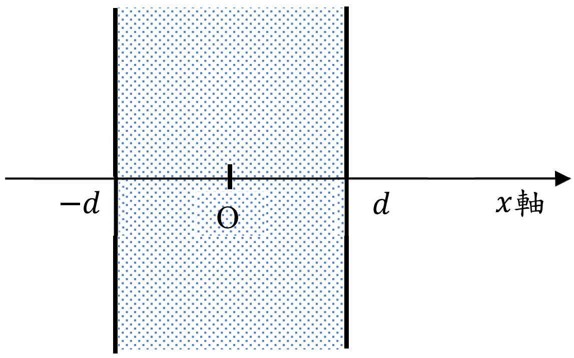


圖 4

(a) 在$x > d$，$0 \le x \le d$， $-d \le x \le 0$和$x \le -d$各區域，其電場分別為何？(4 分)

(b) 質量m，帶負電量q的帶電質點在$x > d$，$0 \le x \le d$， $-d \le x \le 0$ 和$x \le -d$各區域，所受靜電力為何？(2 分)

(c) 根據(a)和(b)的結果，計算在$x = 2d$處、自靜止釋放該帶電質點，須多久可到達$x = 0$？(5 分)

(B)空間中磁場分布對帶電質點運動的影響

在x-y平面上，在x趨近於負無限大而且$-H \le y \le H$的區域內有稀疏的電子束，其相互作用可以忽略。這些電子以相同的速率v、平行x軸，向$+x$方向運動，如圖 5 所示。試設計垂直x-y平面的磁場分佈，滿足以下兩個條件：

(1) 在$x < 0$、$-H \le y \le H$區域中，平行x軸運動的電子束在此磁場分佈的作用下，電子束的電子都會通過坐標原點 O；

(2) 電子通過坐標原點 O 後，行進到$x > 0$的磁場分佈區域。當電子束離開磁場作用的範圍後，電子束會分散成$-2H \le y \le 2H$，並會繼續以平行 x 軸的方式，以相同的速率v向右運動。

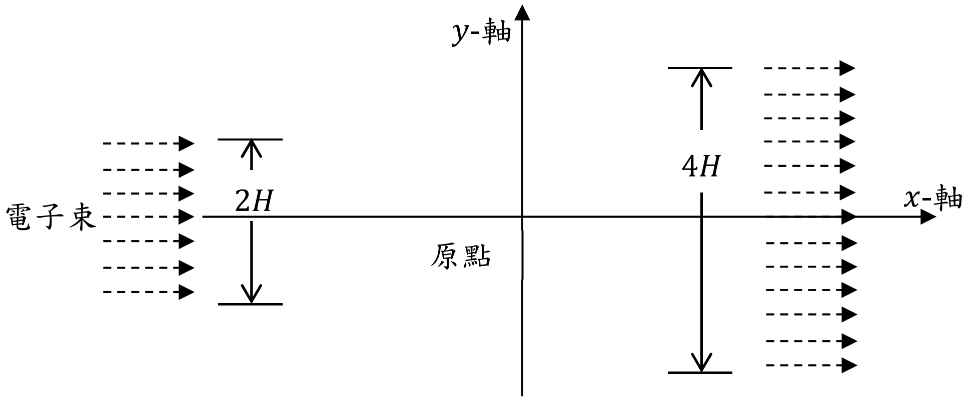


圖 5

回答下列問題

(a) 在$x \leq 0$，且$y \leq 0$的區域，其磁場的量值與作用範圍為何？(4 分)

(b) 在$x \geq 0$，且$y \geq 0$的區域，其磁場的量值與作用範圍為何？(4 分)

(c) 根據(a)、(b)的結果，將所設計的x-y平面上全部磁場區域作圖，並以符號⊗(表示垂直穿入紙面)和符號⊙(表示垂直穿出紙面)標示每一區域的磁場方向。(6 分)

四、<u>坡印廷</u>向量(Poynting vector)

<u>坡印廷</u>向量$\vec{S}$的定義為$\vec{S} \equiv (1/\mu_0)\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$，其中$\mu_0$、$\vec{E}$、和$\vec{B}$分別為真空中磁導率以及空間中電場和磁場強度。$\vec{S}$的方向為能量傳播之方向，而量值為經由電磁場傳輸之單位面積功率。本題考慮三種經由電磁場將能量傳輸至空間中某一區域之情況，並在每一種情況中要求你驗證<u>坡印廷</u>向量，故請勿以<u>坡印廷</u>向量直接回答問題。

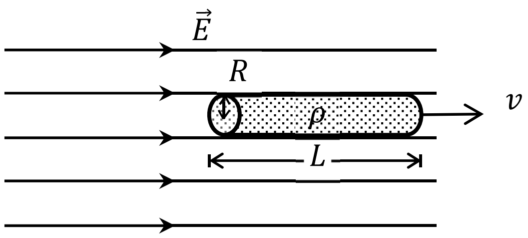


圖 6

(A) 一半徑為R，長度為L，帶有分布均勻電荷密度為ρ 之絕緣圓柱體，在一平行於其長軸方向的均勻電場E中，以速度v沿電場方向運動，如圖 6 所示，則

(a) 試求電場輸給此一圓柱體每單位長度的功率為何？(3 分)

(b) 此圓柱體側表面的磁場量值與方向(請畫圖表示)為何？ (2 分)

(c) 試計算其<u>坡印廷</u>向量$\vec{S}$，說明其方向，並證明其與(a)中電場傳輸給此一圓柱體每單位長度的功率吻合。(3 分)

(B) 一平行板電容器由二半徑為R之金屬圓盤組成，二圓盤間距為d，$d \ll R$，如圖 7 所示。假設此電容器在某一瞬時帶有電荷Q，並以一小定電流I繼續充電，則

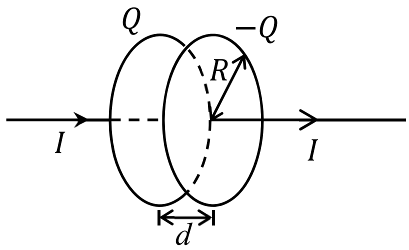


圖 7

(d) 此時輸入電容器的功率為何?(3 分)

(e) 此時在電容器內部邊緣的磁場之量值和方向(以簡圖示之)為何? (忽略電容器中電場之

邊緣效應。) (2 分)

(f) 計算其<u>坡印廷</u>向量$\vec{S}$，說明其方向，並證明其與(d)中輸入之功率吻合。(3 分)

(C) 一半徑為R，長度為ℓ之長螺線管(如圖 8 所示)，單位長度繞有N圈導線帶有電流I，且電流以一固定增加率dI/dt，緩慢增加。

(g) 輸入此螺線管單位長度的功率為何? (3 分)

(h) 在螺線管內部表面附近的電場之量值和方向為何? (並以簡單圖示表示) (3 分)

(i) 計算其<u>坡印廷</u>向量，說明其方向，並證明其與(g)中輸入之功率吻合。(3 分)

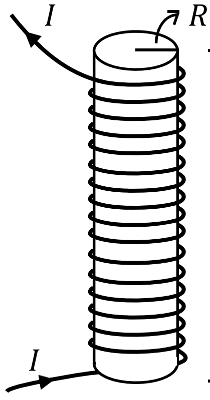


圖 8

五、光的折射與光行差

(A)：在靜止的介質中，折射率決定光的行進方向。我們可以透過適當的設計，調整折射率在空間上之變化，以達到與透鏡相同的聚焦成像效果。如圖 9 所示，有一厚度為d、半徑為a之玻璃圓盤，其折射率在至圓心之距離r處為

$$n(r) = n_0 - \frac{\sqrt{r^2 + n_1}}{d},$$

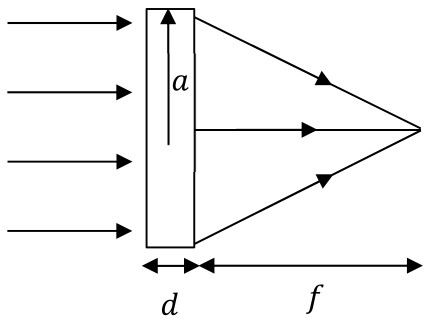


圖 9

其中$n_0 > \sqrt{n_1}/d$，$n_1 > 0$。設空氣的折射率可視為 1，試求垂直玻璃圓盤入射之平行光線聚焦之焦距f。(7 分)

(B)：雖然空氣的折射率接近 1，但仍可對天文的觀測造成偏移作用，如圖 10 所示，與地平面夾角θ_0方向的星體，經大氣的折射後成像之視角度為θ。假設大氣的折射率n只與到地心 O 之距離r有關，$n = n(r)$，是回答以下問題：

(a)距地心r到$r + \Delta r(\Delta r/r \ll 1)$之大氣薄層可視為固定折射率$n = n(r)$之空氣層，考慮光線進入與離開此空氣層之折射，求出$n(r)$及光線與徑向方向之夾角$\phi(r)$所滿足的關係式。由此推論，若要使光線在大氣中能對地球作封閉式的圓周繞行，大氣折射率$n(r)$的形式必須為何？(9 分)

(b)已知大氣的厚度為ΔR約為 200 公里，地球的半徑R_e約為 6400 公里，地面常溫的空氣折射率為1.0003，試估計在$\theta_0 = \pi/4$之星體成像的偏移角$\Delta\theta = \theta_0 - \theta$ (以度表示)。(9 分)

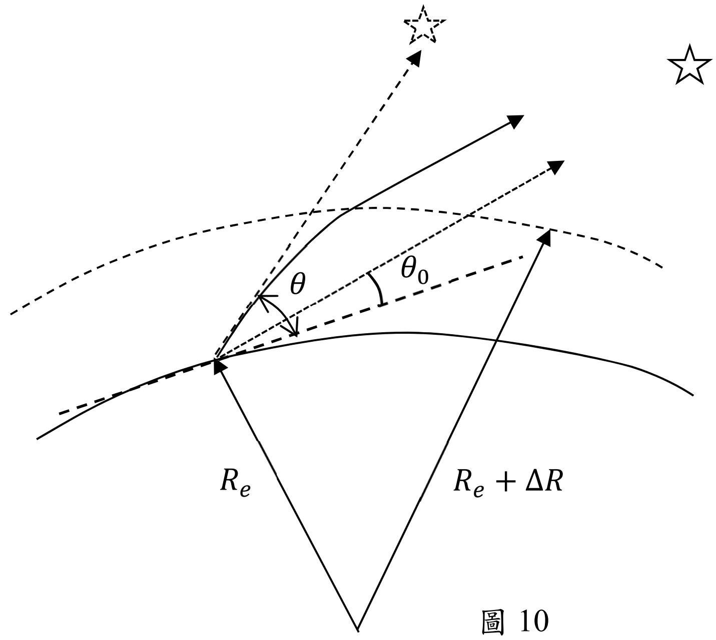


圖 10

六、固體的比熱

(a) 一個系統升高溫度dT時需要吸收熱量dQ，其比熱的定義為$C = dQ/dT$。對固體而言，假設在溫度變化過程中固體對環境的作功的可以忽略不計，請證明$C_P \approx C_V = \frac{dU}{dT}$，其中$U$為系統總能量，$C_P$與$C_V$分別為定壓與定容比熱；以下將固體比熱表示為$C$。(4 分)

一個晶體中原子週期性的排列稱為晶格；晶格在任何溫度都會振動。晶格的振動會對比熱有所貢獻。就如同將電磁波量子化會得到光子，量子化的晶格振動稱之為聲子；聲子的能量如同光子，可表示為$E = \hbar\omega = hf$，而$\hbar = \frac{h}{2\pi}$，其中h為普朗克常數，ω是角頻率且等於$2\pi f$，f為聲子頻率；而聲子波長可表示為$\lambda = \frac{2\pi}{k}$。對應於三維的實空間，k 亦可形成三維的倒空間。在倒空間中，聲子的狀態數dN與聲子在倒空間佔據的體積dV_k關係為$dN = \frac{V}{8\pi^3}dV_k$，其中$V$為固體體積。

(b) 在 Debye 模型中，聲子的色散關係為$\omega = vk$。v為常數，其物理意義為固體中的聲速。試計算能態密度$\rho(\omega) \equiv \frac{dN}{d\omega}$。(6 分)

(c) 晶格的振動會對比熱有部分貢獻。已知聲子低溫比熱C_l正比於$\sim T^n$，則n值為何？(5 分)

(d) 圖 11 是完成測量鋁的比熱與溫度的實驗後，數據經整理後的作圖，圖中在極低溫部分，因為鋁進入超導態，比熱有奇異的跳動，暫且忽略。鋁的比熱含有聲子C_l與導電載子C_e的貢獻，寫出鋁的低溫比熱C與溫度T的關係。(5 分)

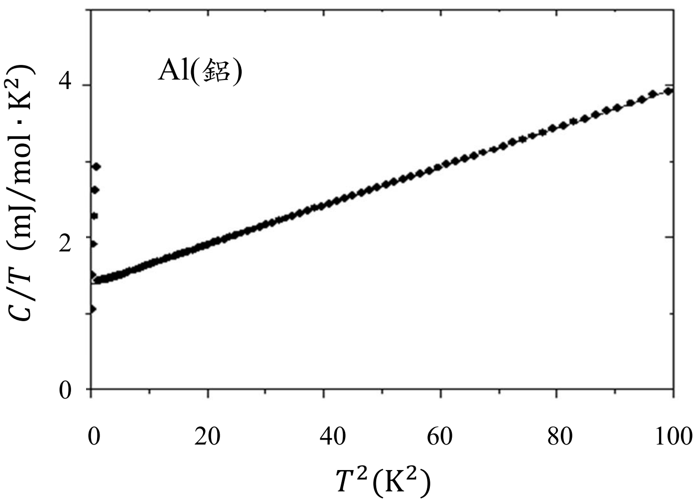


圖 11

(e) 鋁的比熱含有聲子與導電載子的貢獻，導電載子在低能量的能態密度$\rho(\omega)$ 正比於ω^n，則 n 值為何？(5 分)

第 1 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 5 分	寫出力學能守恆：$Mg(R-L\cos\theta)+\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=$ 常數。 v 為 z 方向的速度(地面光滑，故其質心速度沒有水平分量) 。	2	
	$\cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2};\ v=\frac{dh}{dt}=\frac{d}{dt}[(R-L\cos\theta)]\approx\frac{d}{dt}[L\frac{\theta^2}{2}]=L\theta\omega$ 。	1	
	$\frac{1}{2}Mv^2\ll\frac{1}{2}I\omega^2$，質心動能可忽略，故 $\omega_0\approx\sqrt{\frac{MgL}{I}},\ L=\frac{4R}{3\pi}\Rightarrow T\approx 2\pi\sqrt{\frac{3\pi I}{4MgR}}$ 。	2	
(b) 10 分	當$\theta\ll 1$時接觸點大約在半圓柱的底端。	2	
	用平行軸定理求出接觸點的轉動慣量 $I'=I+M(R-L)^2$ 。	2	
	$a_z=\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}[(R-L\cos\theta)]\approx\frac{d^2}{dt^2}[L\frac{\theta^2}{2}]=L\left(\omega^2+\theta\alpha\right)$，因此 $a_z\ll g$。故半圓柱作用在地面的正向力約為 $N=Mg$ 。	2	
	說明靜摩擦力的最大值發生在角加速度最大時，亦即傾角恰為初始傾角時 $MgL\theta_0\approx I'\alpha_0\Rightarrow\alpha_0\approx\frac{MgL\theta_0}{I'}$ 。	2	
	求出質心加速度為 $a_0=\alpha_0(R-L)=\frac{MgL(R-L)\theta_0}{I'}$ 。	2	
(c) 10 分	說明桌面所需的摩擦力要能推動質心，即： $Mg\mu\geq Ma=\frac{M^2gL(R-L)\theta_0}{I'}$ 。	5	
	$\Rightarrow\mu\geq\frac{ML\theta_0}{I'}(R-L)=\frac{4M(3\pi-4)R^2\theta_0}{(3\pi)^2 I'}$ 。	5	

第 2 題評分標準：

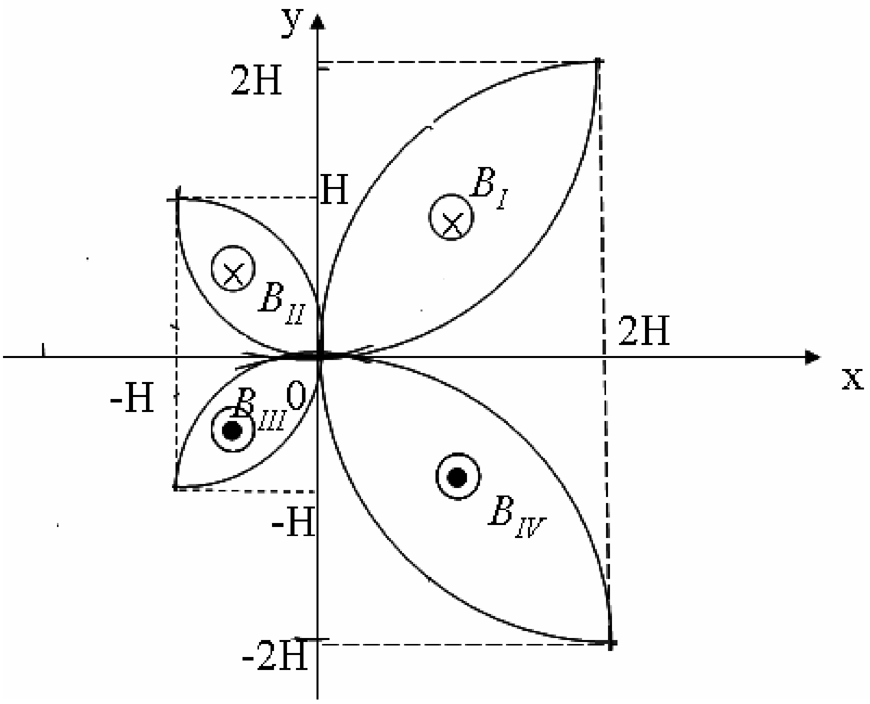
小題	內容	得分	備註
(a) 7 分	求出下方塊與地面第一次碰撞後，上方塊作簡諧運動的週期 $T=2\pi\sqrt{m/k}=0.89\mathrm{s}$。	2	
	列出上方塊初始位置與振幅及相角的關係 $y_0=mg/k=0.2m=y_m\cos\phi$。	1	
	列出上方塊初始速度與振幅及相角的關係 $v_0=\omega y_m\sin\phi$。	1	
	求出上述運動的相角 $\phi=\cot^{-1}\dfrac{mg/k}{v_0/\omega}$=74°=1.3rad。	1	
	上方塊第一次停下的時間為 $T/2-T\cdot(\phi/2\pi)=0.26\mathrm{s}$。	2	
(b) 18 分	由力平衡條件求出下方塊離開地面時，上、下方塊間的距離為 l_0+mg/k。	1	
	列出能量守恆式: $\dfrac{1}{2}mv_1^2+\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2+mg\cdot\dfrac{mg}{k}=\dfrac{1}{2}mv_0^2$。	2	
	求出下方塊離開地面時，上方塊的速率 $v_1=4.4\mathrm{m/s}$。	1	
	兩方塊的質心在空中作拋體運動時，上方塊相對於質心所作簡諧運動: $y(t)=\dfrac{l_0}{2}+y'_m\cos(\omega' t+\phi')$。		
	求出簡諧運動的週期 $T'=2\pi\sqrt{m/(2k)}=0.63\mathrm{s}$。	2	
	求出簡諧運動的相角 $\phi'=\cot^{-1}\dfrac{mg/2k}{v_1/2\omega'}=294°=5.1\mathrm{rad}$	2	
	求出簡諧運動的振幅 $y'_m=\sqrt{\left(\dfrac{mg}{2k}\right)^2+\left(\dfrac{v_1}{2\omega'}\right)^2}=0.24\mathrm{m}$。	2	
	求出上方塊相對於地面的位置 $\dfrac{l_0}{2}+\dfrac{mg}{2k}+\dfrac{v_1}{2}t-\dfrac{g}{2}t^2+\dfrac{l_0}{2}+y'_m\cos(\omega' t+\phi')$。	2	
	求出上方塊相對於地面的速度 $\dfrac{v_1}{2}-gt-\omega' y'_m\sin(\omega' t+\phi')=2.2-9.8t-2.4\sin(10t+5.1)$。	1	

	求出上方塊到達最高點的時間 $2.2-9.8t-2.4\,sin(10t+5.1)=0 \Rightarrow t=0.15s$。	2	
	求出下方塊相對於地面的位置： $\frac{l_0}{2}+\frac{mg}{2k}+\frac{v_1}{2}t-\frac{g}{2}t^2-\frac{l_0}{2}-y'_m\cos\left(\omega' t+\phi'\right)$ $=0.1+2.2t-4.9t^2-2.4\cos\left(10t+5.1\right)$。	1	
	求下方塊再次撞擊地面的時間 t_2=0.26s 。	2	

第 3 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) (a) 4 分	$x>d$，由無窮大均勻帶電平板的電場$E=\sigma/(2\epsilon_0)=\rho d/\epsilon_0$。	1	
	同理，$x<d$， $E=-\sigma/(2\epsilon_0)=-\rho d/\epsilon_0$。	1	
	$0<x<d$，$[x, d]$與$[2x-d, x]$間的電荷所造成的電場互相抵銷，故$E=\sigma/(2\epsilon_0)=\rho x/\epsilon_0$。	1	
	同理，$-d<x<0$， $E=-\sigma/(2\epsilon_0)=-\rho x/\epsilon_0$。	1	
(A) (b) 2 分	$F=qE$。$x>d$，$F=q\rho d/\epsilon_0$；$x<d$， $F=-q\rho d/\epsilon_0$。	1	
	$0<x<d$，$F=q\rho x/\epsilon_0$；$-d<x<0$， $F=-q\rho x/\epsilon_0$。	1	
(A) (c) 5 分	求出 $x=2d$ 到 $x=d$ 所需的時間 $t_1=\sqrt{\frac{2d}{a}}=\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{\rho q}}$。	1	
	求出 $x=d$ 處時的速度為 $v_1=at_1=-d\sqrt{\frac{2\rho q}{\varepsilon_0 m}}$。	1	
	$0\leq x\leq d$ 區間內質點作簡諧運動: $x=A\cos(\omega t'+\varphi),\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{q\rho}{\varepsilon_0 m}}$。 初始條件: $x(0)=A\cos\varphi=d,\ v(0)=-A\omega\sin\varphi=v_1=-\sqrt{\frac{2\rho q}{\varepsilon_0 m}}d$。		
	求得簡諧運動的相角 $\varphi=\tan^{-1}\sqrt{2}$。	1	
	求得 $x=d$ 到 $x=0$ 所需時 $t_2=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\sqrt{2}\right)}{\omega}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{q\rho}}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\sqrt{2}\right)$	1	
	$t_1+t_2=\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{q\rho}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{q\rho}}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\sqrt{2}\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{q\rho}}(\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\sqrt{2})$ $t_1+t_2\simeq 2.04\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{q\rho}}$	1	

(B) (a) 4 分	$x \le 0, y \le 0$，列出磁場的邊界方程式 $x^2+(y+R_{III})^2=R_{III}^2$ (1) $(x+R_{III})^2+y^2=R_{III}^2$ (2)	2	
	求出半徑 $R_{III}=H$	1	
	求出磁場 $B_{\text{III}}=\dfrac{mv}{eH}=2B_I$		
(B) (b) 4 分	$x \ge 0, y \ge 0$，列出磁場的邊界方程式 $x^2+(y-R_I)^2=R_I{}^2$ (3) $\left(x-R_I\right)^2+y^2=R_I{}^2$ (4)	2	
	求出半徑 $R_I=2H$	1	
	求出磁場 $B_I=\dfrac{mv}{eR_I}=\dfrac{mv}{2eH}$ 。	1	

(B) (c) 6 分	$R_I = R_{IV} = 2H$ ，  $B_I = \frac{mv}{eR_I} = \frac{mv}{2eH}$ ，方向為-z， $B_{IV} = \frac{mv}{eR_I} = \frac{mv}{2eH}$ ，方向為 z 。 $R_{II} = R_{III} = H$ ， $B_{\mathrm{II}} = \frac{mv}{eH} = 2B_I$, 方向為 $-z$， $B_{\mathrm{III}} = \frac{mv}{eH} = 2B_I$, 方向為 $+z$。 方向 3 分，圖形 3 分。	6	

第 4 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 3 分	求出圓柱體中的總電荷量$Q=\pi R^2 L\rho$。	1	
	求出電場施於圓柱體的作用力 $F=QE=\pi R^2 L\rho E$。	1	
	求出電場施於圓柱體單位長度的功率 $P/L=\pi R^2\rho Ev$。	1	
(b) 2 分	求出圓柱體中的磁場$B=(\mu_0 R\rho v)/2$。	1	
	由右手定則決定磁場方向為逆時針方向。	1	
(c) 3 分	求出坡印廷向量的量值$S=(1/\mu_0)EB=(R\rho vE)/2$	1	
	求出坡印廷向量的方向:沿圓柱體徑向指向圓柱體中心。	1	
	驗證由坡印廷向量所求出的傳輸到圓柱體的單位長度功率與(a)小題得到的結果一致:$2\pi RS=\pi R^2\rho Ev$。	1	
(d) 3 分	求出平行電板容器的電容: $C=\varepsilon_0\pi R^2/d$	1	
	求出兩平板間的電壓: $V=Q/C=Qd/\varepsilon_0\pi R^2$	1	
	求出輸入之功率: $P=IV \Rightarrow P=IQd/\varepsilon_0\pi R^2$	1	
(e) 2 分	由安培定律求出磁場$B=\mu_0 I/(2\pi R)$	1	
	由右手定則決定磁場方向為逆時針方向	1	
(f) 3 分	求出坡印廷向量的量值$S=(1/\mu_0)EB=IQ/2\varepsilon_0\pi^2 R^3$	1	
	求出坡印廷向量的方向:沿電容器徑向指向其中心。	1	
	驗證由坡印廷向量所求出的傳輸到電容器的功率與(d)小題得到的結果一致:$(2\pi Rd)S=IQd/(\varepsilon_0\pi R)$。	1	
(g) 3 分	求出螺線管的電感: $L=\mu_0 N^2\pi R^2\ell$	1	
	求出電感的跨接電壓: $V=\mu_0 N^2\pi R^2\ell(dI/dt)$	1	
	求出傳到電感的單位長度功率: $P/\ell=\mu_0 N^2\pi^2 I(dI/dt)$	1	
(h) 3 分	求出磁通量$\phi_B=\pi R^2\mu_0 NI$	1	
	由法拉第定律求出電場: $E=(½)\mu_0 NR(dI/dt)$	1	
	由右手定則與冷次定律決定電場方向:順時針方向	1	
(i) 3 分	求出坡印廷向量的量值 $S=(1/\mu_0)EB=\mu_0 N^2 RI(dI/dt)/2$	1	
	求出坡印廷向量的方向:沿螺線管徑向指向其中心。	1	
	驗證由坡印廷向量所求出傳輸到電感的單位長度功率與(g)小題得到的結果一致: $P/L=(2\pi R)S=\mu_0 N^2\pi^2 I(dI/dt)$。	1	

第 5 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 7 分	求出經過圓心之光程 $n(0)d+f$	2	
	求出經過至圓心之距離 r 處之光程 $n(r)d+\sqrt{r^2+f^2}$	2	
	$n(r)d+\sqrt{r^2+f^2}=n(0)d+f \Rightarrow f=\sqrt{n_1}$	3	
(B)(a) 9 分	寫出 Snell’s law: $n(r+\Delta r)\sin i_1 = n(r)\sin j$	2	
	寫出正弦定律 $\dfrac{\sin j}{r}=\dfrac{\sin(\pi-i_2)}{r+\Delta r}$	2	
	由以上兩式得出 $(r+\Delta r)n(r+\Delta r)\sin i_1 = rn(r)\sin i_2$， 即 $rn(r)\sin\phi(r)=$ 常數	2	
	得出使光線在大氣中能對地球作封閉式的圓周繞行的條件 $\phi(r)=\pi/2$ ，$rn(r)=$ 常數，即 $n(r)=k/r$	3	
(B)(b) 9 分	由(a)小題可推出 $nR_e\sin\theta=(R_e+\Delta R)\sin\theta_0$ ，故 $$\sin(\theta_0+\Delta\theta)=\frac{1}{n}\left(1+\frac{\Delta R}{R_e}\right)\sin\theta_0$$	3	
	因為 $\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{\Delta R}{R_e}\right)=1.03094$ 很接近 1，故 $\Delta\theta \ll 1$， $\sin(\theta_0+\Delta\theta)=\sin\theta_0\cos\Delta\theta+\cos\theta_0\sin\Delta\theta \approx \sin\theta_0+\Delta\theta\cos\theta_0$	3	
	由此得出 $\Delta\theta \approx 0.03094\cot\theta_0 = 0.03094 \approx 1.77^\circ$	3	

第 6 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 4 分	寫下熱力學第一定律: $dU = dQ - dW$	1	
	$dW = 0$,	1	
	$C = dQ/dT = dU/dT$	2	
(b) 6 分	寫出倒空間中半徑為 k 的圓球體積: $V_k = \frac{4}{3}\pi k^3$ 。	1	
	寫出倒空間中半徑為 k、厚度為 dk 的球殼體積 $dV_k = 4\pi k^2 dk$ 。	1	
	由波數量子化: $k_i = 2\pi n_i / L_i,\ i = x, y, z$ ，求出 $dV_k = d^3k = (2\pi)^3 dN / V$ 。	2	
	由 $\omega = vk$ ，求出 $\rho(\omega) \equiv \frac{dN}{d\omega} = \frac{dN}{dk}\frac{dk}{d\omega} = \frac{V\omega^2}{2\pi^2 v^3}$ 。	2	
(c) 5 分	寫出 $U \sim \int_0^{kT} E\,\rho(E)dE$	2	
	$C_l = dU/dT \propto T^3$	3	
(d) 5 分	由圖可看出 C/T 相對於 T^2 為一直線	3	
	$C = \gamma T + \beta T^3$ γ與β為常數。	2	
(e) 5 分	$C = \gamma T + \beta T^3$ ，已知 3 次項為聲子的貢獻，故一次項為墊子的貢獻，即 $C_e = \gamma T$ 。	2	
	由(c)小題的結果可以看出，電子的態密度應與頻率無關，即 $\rho_e(\omega) = \text{constant}$ 。	3	