

2017 年第 18 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第 48 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2016 年 11 月 05 日

13 : 30~16 : 30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 1、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 2、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
- 3、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 4、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
- 5、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

2017 年第 18 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 48 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、三個大小與形狀均相同，質量分別為 m_1 、 m_2 、 m_3 的質點，成一直線靜置於光滑水平地面上。 m_1 先以速度 v 與 m_2 作正向彈性碰撞，碰撞後 m_2 的速度為____(1)____。接著 m_2 向前行再與 m_3 作正向彈性碰撞；若 m_1 、 m_3 質量為定值，則當 $m_2 =$ ____(2)____時，會使的碰撞後的 m_3 速率為最大值。

二、一個發球器垂直向上以等時間間距 T_0 、相同初速連續發射出六顆球。當第一顆球恰達到最高點時，第一與第六顆球之間的距離為 H ，求此時第六顆球的速率為____(3)____。(忽略空氣摩擦力的影響)

三、汽車輪胎對行車性能與行車安全都是很重要的因素。假設一般全天候輪胎對乾燥柏油路面的靜摩擦係數 $\mu = 0.70$ ，而濕滑路面為 $\mu = 0.40$ 。為了提高過彎行車速率，高速公路的彎道路面通常會傾斜一個角度 θ ，如圖 1 所示。若 $\theta = 30^\circ$ （這是很斜的路面），質量 $m = 1500 \text{ kg}$ 的汽車行經此傾斜彎道，若彎道的曲率半徑 $r = 50 \text{ m}$ ，則雨天時此車可維持在車道上的最高速率為____(4)____ km/h ，最低速率為____(5)____ km/h 。（假設汽車可視為一個質點。）

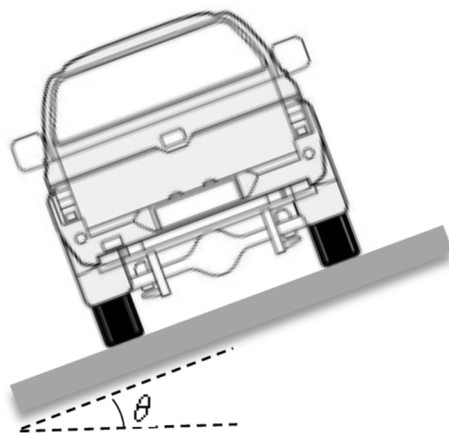


圖 1

四、一厚金屬管，其質量為 0.95 kg ，長度為 9.00 cm ，厚度為 1.75 cm 。在金屬管最外邊緣處標示一點 P ，若該金屬管從某一高度 H 之平台上很緩慢的向下滾，如圖 2 所示。在金屬管滾動到達下方平面後的數秒內，追蹤了 P 點的軌跡 (x, y) ，數據經處理後， P 點之 y 及 x 座標對時間的關係 $y(t)$ 及 $x(t)$ ，分別如圖 3 及圖 4 所示。求金屬管在平面滾動之平均角速度 $\omega =$ ____(6)____ rad/s ；平台之高度 $H =$ ____(7)____ cm 。

註： 1. 重力加速度以 9.80 m/s^2 計算。

2. 因為可能的人為誤差，作答中容許 $\pm 5\%$ 的差異。

3. 該厚金屬管相對於其中心對稱軸之轉動慣量 $I = \frac{1}{2}M(R_o^2 + R_i^2)$ ，其中 M 為該金屬管之質量， R_o 為外半徑， R_i 為內半徑。



圖 2

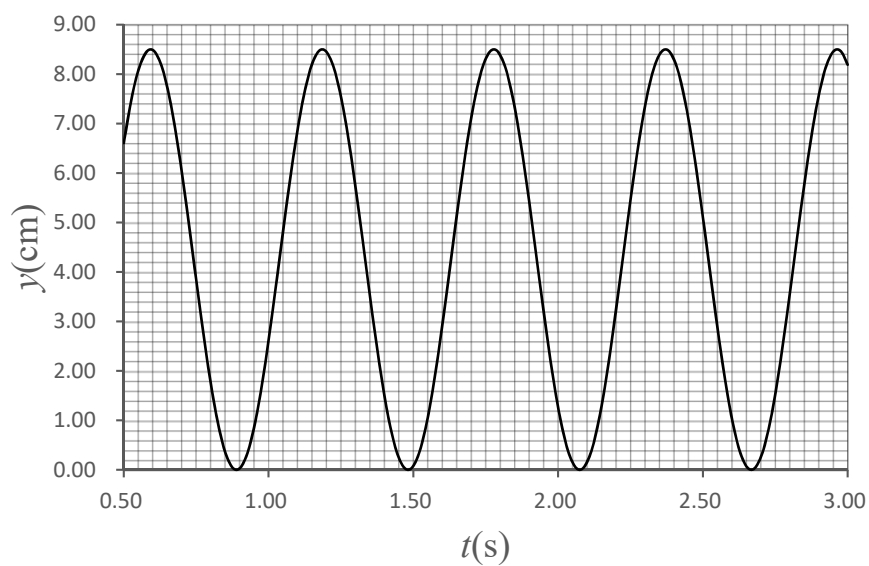


圖 3

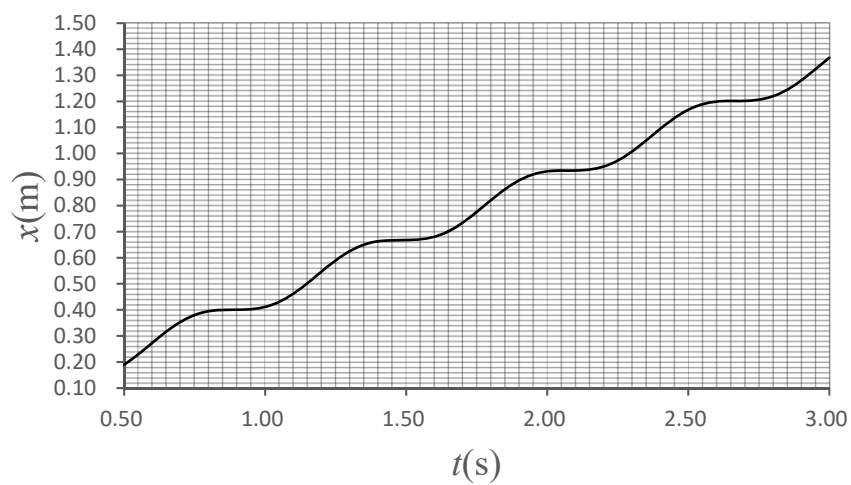


圖 4

- 五、 如圖 5 所示，一質量 $m = 1.0\text{kg}$ 的質點，於 $t = 0$ 時，由一高度為 $h = 1.25\text{ m}$ 的光滑水平面邊緣，以初速度 v_0 向右作直線運動 1.0 m 後，與一力常數 $k = 4.0\text{ N/m}$ ，一端固定於牆面的輕質彈簧作正向碰撞，回彈向左運動，最終掉落在距平面邊緣水平距離為 1.0 m 的地面上。則質點初速度 v_0 為何？____(8)____ 該質點在與彈簧接觸期間，彈簧施以該質點的平均力為何？____(9)____（取向右為正，向左為負，且假設該處重力加速度 $g = 10.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$ ）

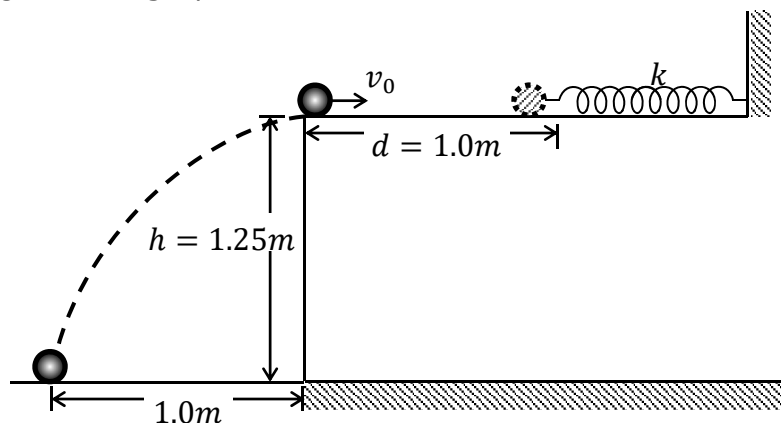


圖 5

- 六、 考慮一剛性金屬棒，以 60° 斜角，固定於兩垂直牆面之間，如圖 6 所示。將一小環套在此棒上，金屬環連接一條弦，弦長 l 固定。弦下方連接一球，球的質量為 M 。假設弦的質量可以忽略，環在棒上可以上下滑動，弦與環的連接是自由的。將弦與棒之間的夾角（較小者）記為 ϕ ，環與球由 $\phi = \phi_0$ 的靜止狀態開始下滑，假設下滑過程中，弦與棒一直維持在同一鉛直面。將重力加速度記為 g 。忽略環與棒之間的摩擦，以及環的質量。選擇 ϕ_0 ，使整個下滑的過程中，弦都沒有擺動，即夾角 $\phi = \phi_0$ 保持不變。在這種情況下，下落的加速度是____(10)____。

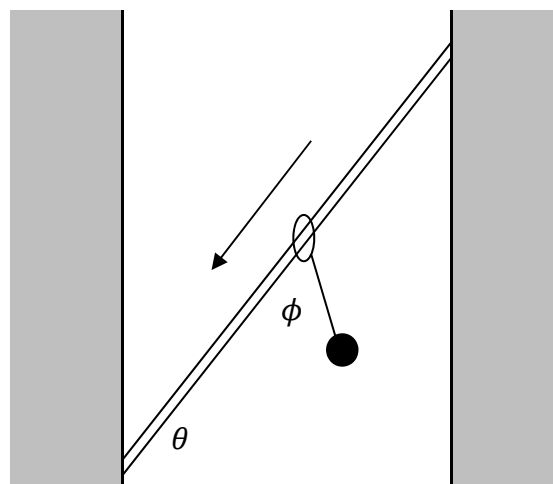


圖 6

- 七、 一顆質量為 m 的衛星 A，環繞一質量為 M 、半徑為 R 、可視為靜止的星球，做半徑為 $R + h$ ($h > 0$) 的圓形軌道運動，被質量為 $\frac{1}{5}m$ 的物體 B，以與它相同的速率從相反方向正向撞上，發生完全非彈性碰撞。在碰撞後，兩者立即黏合成為一體(黏合體稱為 AB)，繼續繞行星球。假設重力常數為 G ，則在剛碰撞後，AB 的速率為____(11)____。若 AB 不致墜落到星球上，則比值 h/R 至少應為____(12)____。

- 八、 如圖 7 所示，把一個質量為 m 的質點固定在質量可忽略，半徑為 R 的剛性圓環上。初始時質點位於圓環的最高點，並讓圓環以幾乎為零的初速，開始向右運動。若圓環作純滾動，當質點與 y 軸的夾角為 θ 時，圓環運動的角速度為____(13)____。若圓環與地面的靜摩擦係數為 μ ，當 $\theta = \theta_0$ 時，圓環會相對於地面滑動，則 $\sin\theta_0 =$ ____ (14) ____。

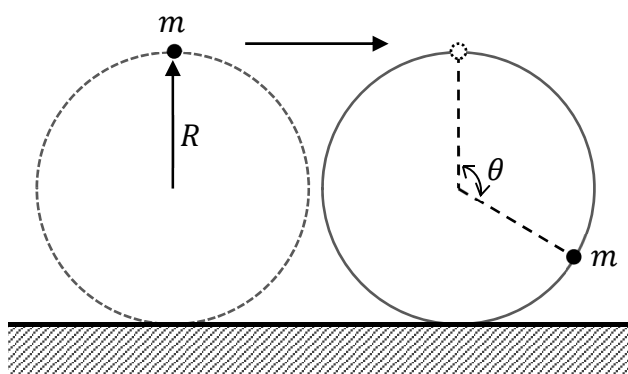


圖 7

- 九、 質量可忽略的 V-型架的 A 與 C 端各固定接上質量為 m_1 及 m_2 的質點，V-型架的端點 B 固定接上沿 x 方向的轉動軸，轉動軸穿過固定在 x 方向的管子，如圖 8 所示。已知 AB 與 BC 的長度皆為 L ，轉動軸與 AB 的夾角固定為 θ_1 ，轉動軸與 BC 的夾角固定為 θ_2 ，V-型架與轉動軸系統在無重力的情形下轉動，轉動軸以角速率 ω 轉動，忽略轉動軸與管子之間的摩擦力，試求當 V-型架恰轉到 x - y 平面時，兩質點相對於 B 點的總角動量____(15)____；若將管子移除後，V-型架與轉動軸系統在轉動時，轉動軸仍能維持在 x 方向，則 $\sin(2\theta_1)$ 與 $\sin(2\theta_2)$ 的關係應為何?____(16)____。

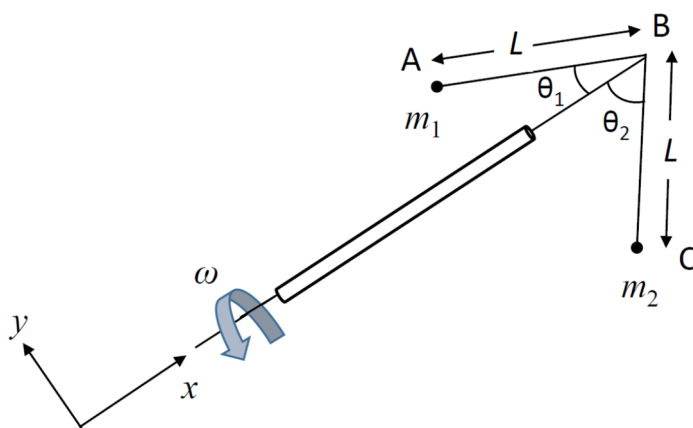
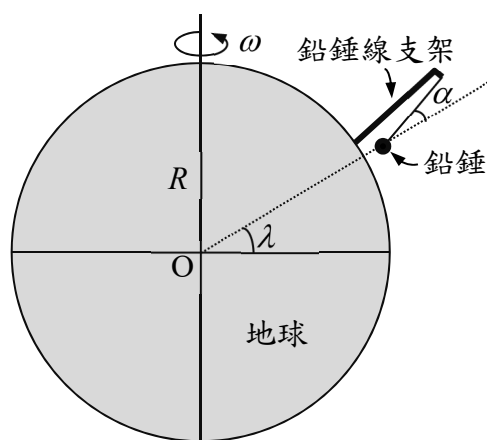


圖 8

- 十、 鉛直方向是指當自由懸掛的鉛錘線張緊時，沿線的方向，但由於地球自轉的緣故，鉛直線不一定指向地球的中心，而以一很小的角度 α ，偏離鉛錘和地心的連線，如圖 9（未按比例）所示。該偏離角度 α 和所在位置的地球緯度 λ 有關，考慮北半球的情況，利用下列數據：地球半徑 $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 、重力加速度 $g_0 = Gm_E/R^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、地球自轉角速率 $\omega = 2\pi/86400 = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ，式中 G 為重力常數， m_E 為地球的質量，回答下列問題。在地球表面上的哪一個緯度位置，偏離角



（未按比例作圖）

圖 9

度 α 達到最大值？ $\lambda =$ _____ (17) 度。計算偏離角度 α 的最大值： $\alpha_{max} =$ _____ (18) 度。

- 十一、 如圖 10 所示，水上飛板為一新發明的水上飛行休閒設備，透過巨型長管吸水，然後再透過腳底的噴水系統噴出高壓水柱將人推到高空以進行飛行。腳底之噴水系統可由圖 11 之簡化模型描述，其中水柱經由上方固定施力(加壓)由下方小孔噴去。假設每一腳底有一個出水口，水柱出口半徑 $r = 5\text{cm}$ ，上方加壓端之水柱半徑甚大於水柱出口半徑，即 $R \gg r$ 。若人加上裝備約 100 kg 重，且水柱經由噴水系統噴出之過程的重力位能變化可忽略不計，試估計欲使人穩定地浮在空中，所需提供之功率為 _____ (19) W (取兩位有效數字)。(已知水的密度為 1000kg/m^3)。



圖 10

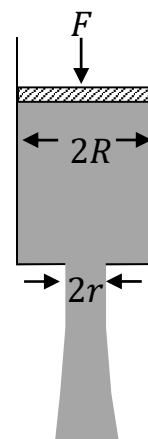


圖 11

- 十二、 如圖 12 所示，一垂直的 U 形開口細管，橫寬為 $2R$ ，裝水到 h 的深度，繞著它的中垂軸以等角速度 ω 旋轉。令管底 A 點為座標系原點，以 r 代表一點到轉軸之徑向距離，以 z 代表相對於 A 點的高度，則 A 點的座標為 $(0,0)$ 。令 $p(r,z)$ 代表座標為 (r,z) 之點的液體壓力。假設水的密度 ρ 與重力加速度 g 均為定值，大氣與水的溫度都固定為 T 。當 U 形管以角速度 ω 旋轉而達成平衡時，則 $(r,0)$ 與 $(0,0)$ 兩點的壓力差 $\Delta p \equiv p(r,0) - p(0,0) =$ _____ (20) (答案以 r 、 ω 與 ρ 表示)。已知溫度為 T 時，水的蒸氣壓為 p_v 。假設水面上(如 B 點)的大氣壓力為 p_0 ，則當 $\omega =$ _____ (21) 時(答案以 p_v 、 p_0 、 R 、 h 、 ρ 與 g 表示)，A 點的水會開始沸騰而出現空泡化現象。

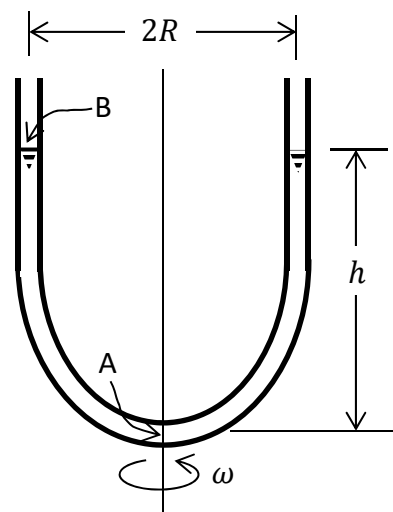


圖 12

- 十三、 有一架以等速度 v 飛行的噴射飛機，在離地高度為 h 的水平面上，沿一直線飛行。在地面上的一名觀察者，從目擊該架飛機飛臨他的頭頂正上方時，開始計時，經過時間 t 之後，聽到音爆。已知當時的聲速為 v_s ，若不計聲速受高度的影響，則該飛機的飛行速度 $v =$ _____ (22) ，以 v_s 、 h 、和 t 表示之。

十四、天燈相傳是三國時期孔明發明的，而放天燈是目前台灣家喻戶曉的觀光祈福活動。我們考慮下列的模型以了解天燈為什麼能鼓鼓的升上天空。假設天燈乃由總質量 m 的薄紙(含燃料等酬載)製成，其外型為圓柱形、體積為 V ，下方有一直徑較小的圓形開口。天燈外的空氣溫度為 T_{out} ，密度為 ρ_{out} ，而天燈內的熱空氣溫度為 T_{in} 。假設天燈內外氣體分子組成相同，則天燈內的空氣密度 $\rho_{\text{in}} = \underline{\hspace{2cm}} (23) \underline{\hspace{2cm}}$ 。天燈一開始可升空的條件為 $\underline{\hspace{2cm}} (24) \underline{\hspace{2cm}}$ 。

十五、有兩個絕熱圓柱形容器裝著相同莫耳數 n 、同種類的理想氣體如圖 13。兩理想氣體的初始的體積皆為 V ，溫度為 T 。系統 A 有一個可翻轉的閥門，上半部為真空。系統 B 有一個沒有摩擦力、可移動的活塞。兩容器的總體積皆為 $2V$ 。接下來，系統 A 的閥門被迅速打開；系統 B 的活塞則緩慢上升到頂。系統 A 在此過程的溫度變化為 $\underline{\hspace{2cm}} (25) \underline{\hspace{2cm}}$ 。系統 B 在此過程的溫度變化為 $\underline{\hspace{2cm}} (26) \underline{\hspace{2cm}}$ (答案可能要用到參數 $\gamma = c_P/c_V$ ； c_P 與 c_V 分別為理想氣體定壓與定容比熱。)

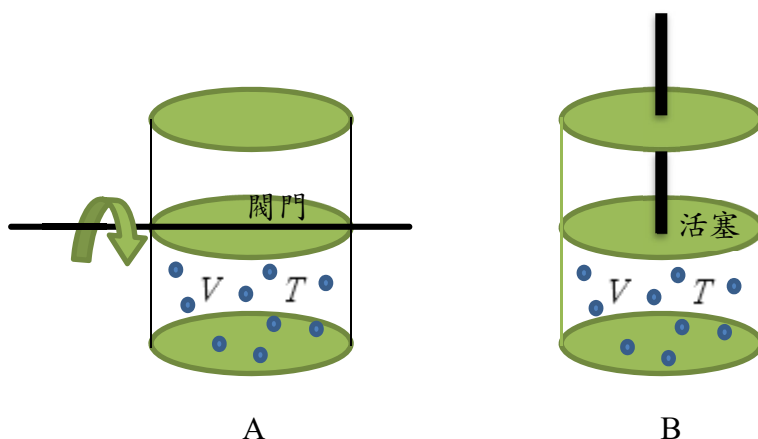


圖 13

十六、二相同的絕熱容器中各含相同數目的氦原子，二者以一閥門相聯。若第一個容器中原子的方均根 (root-mean square) 速度為 $1.0 \times 10^3 \text{ m/s}$ ，第二個容器中的原子的方均根速度為 $2.0 \times 10^3 \text{ m/s}$ ，則將相連的閥門打開，使二容器相通，達平衡後容器中原子的方均根速度為何？ $\underline{\hspace{2cm}} (27) \underline{\hspace{2cm}}$ 此時容器中氣體的溫度為何？ $\underline{\hspace{2cm}} (28) \underline{\hspace{2cm}}$ (已知：氦氣的原子量為 4.0 g/mole ；氣體常數 $R = 8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$)

十七、如圖 14 所示，考慮一長方形汽缸，唯一可活動的一面活塞設為 $y-z$ 平面，面積為 $A \sim 10^{-2} \text{ m}^2$ 。其他汽缸面均固定，汽缸內氣體保持不外洩。汽缸外壓力保持為一大氣壓，溫度保持為 23°C 。汽缸內裝有 0.1 莫耳由雙原子分子構成的理想氣體。若在活塞面垂直施力 F ，活塞面會移動 Δx 。假設施力前後，氣體都與汽缸外環境維持熱平衡狀態。當 Δx 很小時，施力 F 會正比於 Δx ，如同彈簧一般。計算此系統所對應的等效彈力常數： $F/\Delta x = \underline{\hspace{2cm}} (29) \underline{\hspace{2cm}}$ 。

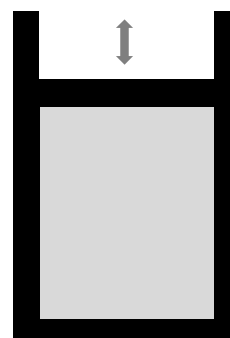


圖 14

在許多實際的運用中，活塞的運動很快，會使汽缸內外不容易達成熱平衡，但汽缸內氣體達成熱平衡又夠快，可以視為準靜過程(氣體在變化中一直處於熱平衡狀態)，此時將汽缸內氣體視為絕熱，反而是較好的近似。絕熱過程中，氣體的壓力與體積滿足 $PV^\gamma = \text{常數}$ ， $\gamma = c_p/c_v$ 。對雙原子分子構成的理想氣體： $\gamma \sim 1.4$ 。假設施力過程氣體一直保持絕熱，求此時對應的等效彈力常數： $F/\Delta x = \underline{\hspace{2cm}} (30) \hspace{2cm}$ 。

貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、如圖 15 所示，一單擺由一長 L 、質量可忽略的細繩與固定於其底端的質點所組成。單擺一端固定在 O 點，某生在距離 O 點 αL 處的 A 點處釘上一圖釘，將單擺拉緊到水平後由靜止釋放。

- 求質點在 B 點時細繩所受的張力 T 。(5 分)
- 當 $\alpha \leq \alpha_c$ 時，細繩在特定角度 $\theta = \theta_0$ 時張力會變成零，求 α_c 及 $\cos \theta_0$ (2 分)
- 若 $\alpha = 3/7$ ，試問單擺細繩繞圖釘運動的過程中(即階段 II)，質點軌跡的最高點與 A 點的高度差 d 。(4 分)
- 當 $\alpha = \alpha_0$ 時，質點在下降的過程中會恰好打到 A 點，求 α_0 。(4 分)

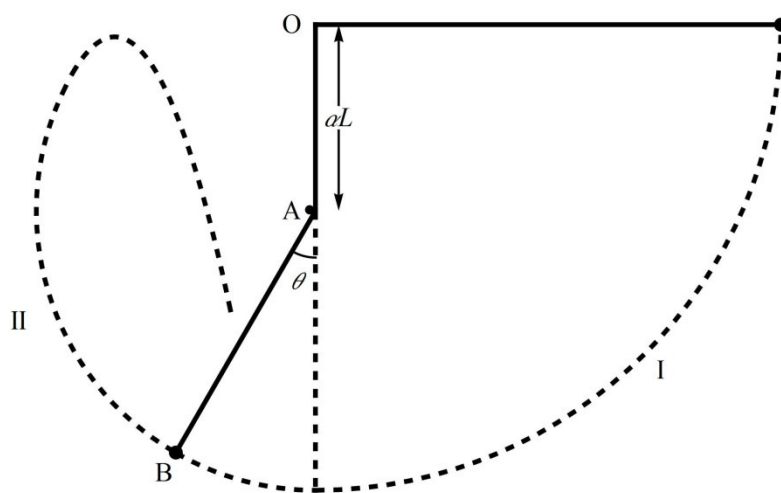


圖 15

二、在宇宙膨脹的過程中，我們通常用一個與時間相關的通用尺度因子 $a(t)$ 來表示長度和距離。兩顆恆星之間的距離 $L(t)$ 正比於 $a(t)$ ，即 $L(t) = ka(t)$ ，式中 k 為常數。因此我們可以用「宇宙尺度因子」 a 來描述其膨脹程度。以下假設宇宙膨脹為準靜態的絕熱膨脹過程。

- (a) 早期宇宙的溫度極高，所有的粒子的運動速率幾乎接近光速，因此這些粒子可視為「光子氣體」。假設此「光子氣體」以均勻的密度瀰漫在整個宇宙空間，且「光子氣體」的壓力 p 與能量密度 u 的關係為 $p = u/3$ ，求其能量密度 u 與 a 之間的關係。(5 分)
- (b) 已知「光子氣體」的能量密度 $u = bT^4$ ，式中 b 為常數， T 為光子氣體的絕對溫度。求此「光子氣體」的溫度 T 與 a 之間的關係。(4 分)
- (c) 現今宇宙背景輻射的溫度已測知為 3.0K。不考慮宇宙在膨脹過程中，形成物質的影響，則當宇宙背景輻射的溫度為 3000K 時，宇宙體積 $V(3000K)$ 和現今宇宙體積 $V(3.0K)$ 的比值。(3 分)
- (d) 宇宙溫度會隨著膨脹而下降。當溫度夠低時，大部分的粒子變成像灰塵一樣，其壓力 $p = 0$ ，求這個時期宇宙能量密度 u 與 a 之間的關係。(3 分)

2017 年第 18 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 48 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題參考解答

壹、填充題

一、(1) $\frac{2m_1}{m_1 + m_2}v$

(2) $\sqrt{m_1 m_3}$

二、(3) $u = \frac{H}{5T_0} + \frac{5gT_0}{2}$

三、(4) 90 km/hr

(5) 30 km/hr

四、(6) 10.6 rad/s

(7) 1.72 cm

五、(8) 2.0 m/s

(9) -2.5N

六、(10) $\frac{\sqrt{3}}{2}g$

七、(11) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

(12) $\frac{5}{2}$

八、(13) $\sqrt{\frac{g}{R}}|\tan(\theta/2)|$

(14) $\sin\theta_0 = \frac{2\mu}{1+\mu^2}$

九、(15) $(m_1 \sin^2 \theta_1 + m_2 \sin^2 \theta_2)\omega L^2 \hat{x} + (m_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - m_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2)\omega L^2 \hat{y}$

$$(16) \quad \underline{m_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - m_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 = 0}$$

$$十、(17) \quad \underline{45^\circ}$$

$$(18) \quad \underline{1.7 \times 10^{-3} \text{rad (或 } 0.10^\circ \text{)}}$$

$$十一、(19) \quad \underline{3900}$$

$$十二、(20) \quad \underline{\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2}$$

$$(21) \quad \underline{\frac{1}{R} \sqrt{2 \left(\frac{p_0 - p_v}{\rho} \right) + gh}}$$

$$十三、(22) \quad \underline{\frac{h v_s}{\sqrt{h^2 - (v_s t)^2}}}$$

$$十四、(23) \quad \underline{\frac{T_{\text{out}}}{T_{\text{in}}} \rho_{\text{out}}}$$

$$(24) \quad \underline{m < \rho_{\text{out}} V \left(1 - \frac{T_{\text{out}}}{T_{\text{in}}} \right)}$$

$$十五、(25) \quad \underline{0}$$

$$(26) \quad \underline{(1 - 2^{1-\gamma}) T}$$

$$十六、(27) \quad \underline{1.6 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

$$(28) \quad \underline{4.0 \times 10^2 \text{ K}}$$

$$十七、(29) \quad \underline{4.1 \times 10^3 \text{ N/m}}$$

$$(30) \quad \underline{5.7 \times 10^3 \text{ N/m}}$$

貳、計算題

第一題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 5 分	由力學能守恆: $\frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta) = mgL$	2	
	徑向運動力平衡: $T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$	2	
	答案: $T = \left\{ \frac{2\alpha}{1-\alpha} + 3\cos\theta \right\} mg$	1	
(b) 2 分	由 $T = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{-2\alpha}{3(1-\alpha)}$	1	
	$\alpha_c = 3/5$	1	
(c) 4 分	斜拋運動的 y 分量: $y = -(L - R) - R\cos\theta_0 + v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2$	1	
	斜拋運動最高點的條件: $v_0\sin\theta_0 - gt = 0$	1	
	由力學能守恆求得 v_0 : $v_0^2 = 2gL\{\alpha + (1 - \alpha)\cos\theta_0\} = 2gL\alpha/3$	1	
	答案: $d = \frac{11}{28}L$	1	
(d) 4 分	經過 A 點的條件, x 分量: $-R\sin\theta_0 - v_0\cos\theta_0 t = 0$	1	
	經過 A 點的條件, y 分量: $-R\cos\theta_0 + v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$	1	
	消掉 t 後所得到的條件: $-\frac{R}{\cos\theta_0} - \frac{gR^2}{2v_0^2}\tan^2\theta_0$	1	
	答案: $\alpha_0 = -3 + 2\sqrt{3} \approx 0.46$	1	

第二題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 5 分	熱力學第一定律： $dU = -pdV$	1	
	帶入光子氣體壓力 P $d(uV) = -\frac{1}{3}udV$	1	
	化簡方程式： $\Rightarrow \frac{4}{3} \frac{dV}{V} + \frac{du}{u} = 0$	1	
	答案： $u \propto V^{-4/3} \propto a^{-4}$	2	
(b) 4 分	利用 $u = bT^4$	2	
	得出 $T \propto a^{-1}$	2	
(c) 3 分	$V \propto a^3 \propto T^{-3}$ 。	2	
	答案： $\frac{V(3000K)}{V(3.0K)} = 1.0 \times 10^{-9}$	1	
(d) 3 分	熱力學第一定律： $p=0$ ，故 $dU = 0$	1	
	答案： $u \propto V \propto a^{-3}$	2	