

2017年第18屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第48屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2017年2月11日

13:30~16:30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 三、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t 為時間， x 為任意物理量)

$$1. \quad x'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$2. \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad m \neq -1; \quad \frac{d}{dx} x^m = m \cdot x^{m-1}$$

$$3. \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x,$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$4. \quad \text{當 } |x| \ll 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2},$$

$$5. \quad \text{當 } x \ll 1, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

6. 線性、常係數、齊次二階微分方程式 $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$
的一般解形式為 $x(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t}$,
其中 s_1, s_2 是右列二次方程式 $as^2 + bs + c = 0$ 的根,
而 α_1, α_2 是積分常數, 可由初始條件 $x(0), x'(0)$ 決定。

2017年第18屆亞洲物理及第48屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、理想氣體的受熱膨脹

如圖 1 所示，一個除了底部之外，器壁均為絕熱的氣筒，以一隔板將該筒隔成體積相等的 A、B 兩部分，各裝有 1 mole 初始溫度為 0°C 、氣壓為 1 atm 的氮氣。氣筒的頂部為一活塞（亦為絕熱），其上壓力始終保持為 $P_0 = 1 \text{ atm}$ 。今將 80.0 cal 的熱量緩慢地由氣筒底部輸入氣筒。假設氮氣可視為理想氣體，氣體常數 $R = 8.31 \text{ J/mole}\cdot\text{K}$ ，試求下述兩種情況下，A 和 B 兩部分氣體之壓力、體積、與溫度的變化量各為若干。

(A) 隔板固定且導熱（其熱容量可以忽略）；(13 分)

(B) 隔板可自由滑動（無摩擦）且絕熱。(12 分)

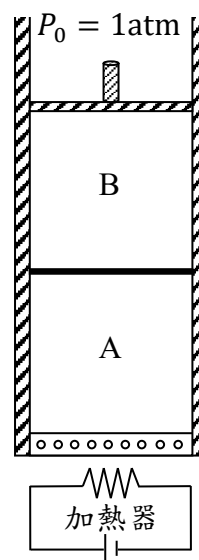


圖 1

二、廣義化反射定律與折射定律的推導

我們考慮兩介質之間的介面為一平面。現有一波長為 λ 的平面電磁波，由介質 1 射向介質 2，其入射角、反射角及折射角分別為 θ_1 、 θ'_1 及 θ_2 ，如圖 2 所示。

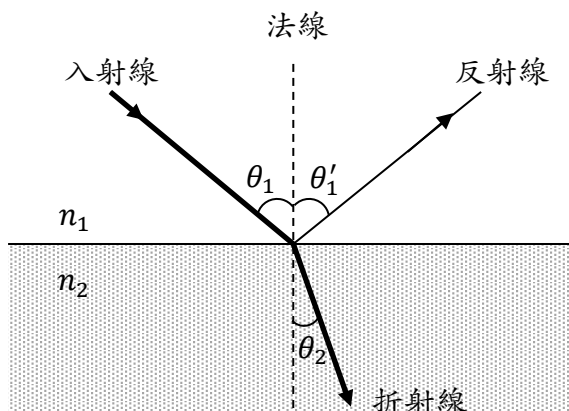


圖 2

已知若此介面是均勻的，則介面對反射波及折射波所造成之相位角變化與入射點的位置無關。當 $n_1 > n_2$ 時，反射波在介面相位角沒有變化；而當 $n_1 < n_2$ 時，反射波在介面的相位角變化為 π 。兩介質的介面在經過適當的設計及處理後，可以使光經介面反射或折射時，皆產生隨 X 軸座標變化的介面相位變化 $\Phi(x)$ ，如圖 3 所示。（設介面上另一軸為 Y 軸，本題假設相位角的改變與 Y 軸座標無關，即 $\Phi(x, y) = \Phi(x)$ 。）

- (A)設介面為均勻，用費馬原理(Fermat principle)推導光的反射與折射定律。(6分)
(註：費馬原理為光(電磁波)在兩定點之間傳播的路徑是光程取極值的路徑，最初費馬提出時，又名「最短時間原理」：即光傳播的路徑是所需時間最短的路徑。)

(B)費馬原理乍看之下，頗為神奇且令人費解，

例如：光在出發之時，如何探知哪一條路徑是需時最少的？其實，費馬原理的物理機制是電磁波行進的路徑是穩定相位(stationary phase)的路徑，即在兩定點 A 與 B 之間真實路徑(如左圖中之實線)所累積的相位變化

$d\phi$ 總和_{實線} $\int_A^B d\phi(\vec{r})$ ，與鄰近路徑(如左圖中

之虛線)所累積的相位變化總和_{虛線} $\int_A^B d\phi(\vec{r})$

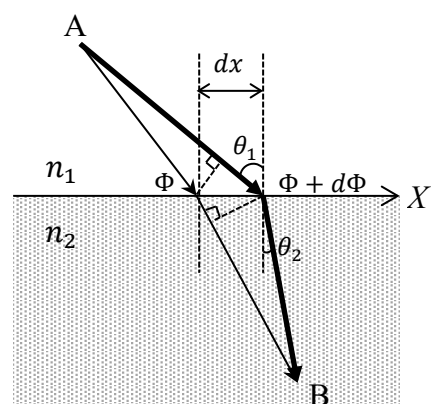


圖 3

幾乎相同。在本小題中假設 $d\Phi/dx = 0$ ，故得：_{實線} $\int_A^B d\phi(\vec{r}) -$ _{虛線} $\int_A^B d\phi(\vec{r}) \approx 0$ 。

利用此式及上述提示來證明光的折射定律。(4分)

- (C)假設 $\frac{d\Phi}{dx} \neq 0$ ，即光在介面反射或折射時，會產生隨 X 軸座標變化的介面相位變

化 $\Phi(x)$ 。利用上圖，推導出廣義化反射定律： $\sin\theta'_1 - \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2\pi n_1} \frac{d\Phi}{dx}$ ；與廣義

化折射定律： $n_2 \sin\theta_2 - n_1 \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\Phi}{dx}$ 。(5分)

- (D)設 $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{2\pi}{\Gamma}$ ，此處 Γ 為常數。令 $\alpha \equiv \lambda/\Gamma$ ，通常 $\Gamma > \lambda$ ，故 $0 < \alpha < 1$ 。

(a)求反射光不存在的入射角範圍。(3分)

(b)設 $n_1 < n_2$ ，在什麼情況下會產生全反射？其臨界入射角為何？(7分)

三、磁力顯微儀

掃描探針顯微儀在表面物理的研究上扮演著重要的角色。該儀器有一個微米級懸臂，懸臂一端固定在一個振盪器上，而在懸空的自由端上則裝有一個凸出的微細針尖。整個懸臂構成一個彈簧振盪系統，在沒有磁作用力時，探針的運動方程式，可以用下式表示：

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F_0 e^{i\omega t}$$

其中 M 為探針系統的質量， b 為阻尼係數（假設為弱阻尼）， k 則為未受磁力作用時之彈力係數， $F_0 e^{i\omega t}$ 為上下振動之驅動力。此運動方程式的穩態解形式為 $z(t) = A e^{i(\omega t - \phi)}$ ，其中 A 為振幅， ϕ 為相位角；振幅及相位角均為驅動角頻率 ω 的函數。如圖 4 所示，掃描磁力顯微儀的探針可視為一個 z 方向的小磁矩，針尖與待測表面

維持固定的間距，顯微儀藉由磁作用力可探究待測表面之磁區分布。

磁力顯微儀的工作原理是：探針受到待測物體表面磁場作用而帶有「磁位能」 $U = -mH_z$ ， m 為磁矩， H_z 為 z 點的磁場強度。由於磁場強度隨距離改變，探針會受到一個沿 z 方向的非均勻磁力，因而造成懸臂共振角頻率之變化。當針尖掃描過待測物表面時，系統會將共振角頻率的變化轉換成亮暗對比：共振角頻率上升時呈現「亮」階；相反時則呈現「暗」階。共振角頻率的變化，也會造成振幅與相位角的改變，所以磁力顯微儀可以利用共振角頻率、相位角與振幅的變化作為偵測的機制。由以上所述，回答下列各問題。

- (A) 令 $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ ，求出探針在未受磁作用力時，其振幅與相位角對驅動角頻率的關係式。(6 分)
- (B) 承上子題，求共振(振幅最大)角頻率(準確到 b 的一階)。(4 分)
- (C) 假設 $H_z = az^2$ ，其中 a 為正的常數。在弱阻尼情況下($b \rightarrow 0$)，若以共振角頻率變化作為偵測磁作用力的機制，試推導共振角頻率變化量($\Delta\omega$)與 m 、 ω_0 、 a 和 z 的函數關係(準確到 a 的一階)。(9 分)

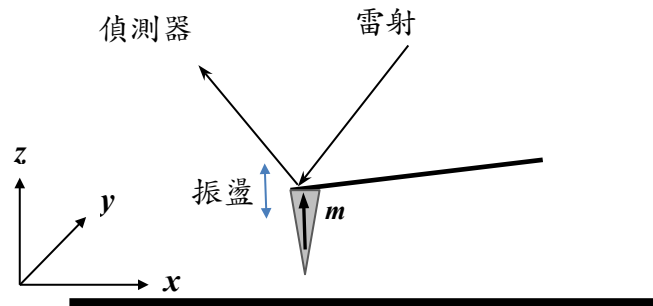


圖 4：掃描探針示意圖，因為懸臂受到外部驅動，造成探針上下振盪；相關變化量之資訊，則可由反射的雷射光分析得知。

- (D) 承上子題，偵測一表面上帶電流 i 之導線組，掃描時固定探針之高度 z ，且 $z \ll x_0, l_0$ ，如圖 5 所示。標示圖 5 中 I、II 和 III 等三區為亮階或暗階？(6 分)

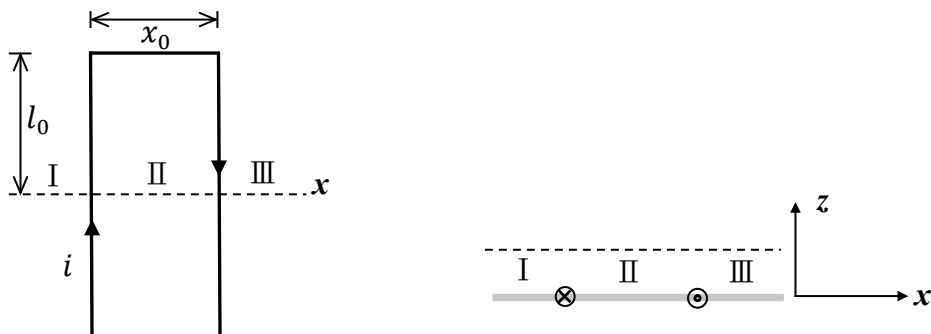


圖 5：左圖為俯視圖，虛線為探針掃描路徑；
右圖為側視圖，虛線表示固定的掃描高度。

四、帶有滑動的滾動

假設水平地面與直角座標系之 xy 平面重合，且在此地面上有一個質量為 m 、半徑為 R 的均勻圓球。在時刻 $t = 0$ 時，球從座標原點 O 開始做帶有滑動的滾動運動，球繞質心轉動之角速度 $\vec{\omega}_0 = \omega_0(\hat{x} + \hat{y})/\sqrt{2}$ ，球之質心速度 $\vec{v}_0 = \sqrt{2}\omega_0 R\hat{y}$ 。此外，球繞質心之轉動慣量為 $I = mk^2 = 2mR^2/5$ ，球與地面間的動摩擦係數為 μ_k ，重力加速度為 $-g\hat{z}$ 。

假設在時刻 $t > 0$ 時，圓球之質心速度向量為 $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$ ，轉動角速度向量為 $\vec{\omega}$ ，而圓球底部之速度向量為 $\vec{u} = u\hat{u}$ ，其中 $\hat{u}$ 為與球底速度 $\vec{u}$ 同向之單位向量。

- (A) 試求出圓球底部之初始速度 $\vec{u}_0$ 之量值 u_0 與方向 $\hat{u}_0$ 。(6 分)
- (B) 寫出圓球有滑動時，其質心的運動方程式與繞質心轉動的運動方程式。(4 分)
- (C) 試求出圓球有滑動時， $\vec{u}$ 隨時間 t 變化的函數。(5 分)
- (D) 試求出圓球開始做純滾動之時刻 T 。(3 分)
- (E) 試求出 $0 < t \leq T$ 時的質心速度 $\vec{v}(t)$ ，並求出圓球開始做純滾動時，其底部之位置 $\vec{r}_T = x_T\hat{x} + y_T\hat{y}$ 。(7 分)

五、湯姆生磁浮金屬環

如圖 6 所示，一通有電流 $I(t)$ 之螺線管線圈，將磁場經由圓柱形軟鐵導入 $z > 0$ 區域。一個套住軟鐵之金屬環可以透過螺線管所產生磁場之作用而浮在 $z = z_0$ 處。若螺線管線圈與金屬環半徑均為 a ，線圈數為 N ，軟鐵的磁導率為 μ ，金屬環的電阻為 R ，自感為 L ，試回答以下問題。

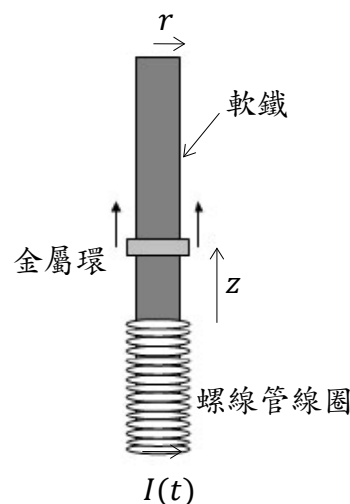


圖 6

- (A) 由於軟鐵是圓柱形，可假設磁場只有沿 z 軸與徑向 r 之分量： B_z 與 B_r 。
- (a) 已知對固定 z 值， $B_z(z, r) \approx B_z(z, 0)$ ，若忽略螺線管長度，試計算 $B_z(z, r)$ ，並由此求出金屬環與螺線管線圈間的互感 $M(z)$ 。(6 分)
- (b) 考慮通過長度為 $dz \ll 1$ 、半徑為 r 之圓柱面(包括兩端之截面)之磁通量，求 B_z 與 B_r 之關係，由此計算 $B_r(z, r)$ 。(5 分)
- (B) 已知螺線管線圈中電流為 $I(t) = I(z) \sin \omega t$ (以逆時針方向為正)，假設 t 時刻時，金屬環中之電流已達到穩態。
- (a) 試求 t 時刻時，金屬環中之電流值(以 $M(z)$ 、 $L(z)$ 、 $I(z)$ 、 R 表示)。若此電流與螺線管線圈中電流之相位差為 δ ，試求 $\tan \delta$ 。(6 分)
- (b) 已知螺線管線圈的電阻為 R_0 ，自感為 L_0 。金屬環之電阻 R ，相較於螺線管線圈的電阻 R_0 可忽略不計。若將螺線管線圈接上一交流電源，其電動勢為 $\varepsilon(t) = V_0 \cos \omega t$ ，試求螺線管線圈中電流值振幅 $I(z)$ (以 R_0 、 L_0 、 L 、 V_0 、 ω 與 $M(z)$ 表示)。在一般的情形下 $L_0 L > M^2(0)$ ，試說明 $I(z)$ 隨 z 增加的變化趨勢，是遞增還是遞減？(8 分)

六、甘恩振盪電路

甘恩二極體(Gunn diode)為一種轉移電子元件，一般可由砷化鎵半導體材料製作而成。此二極體會展現獨特的非線性 $I-V$ (電流-電壓)關係，如圖 7 所示。甘恩二極體最奇特之性質為：在適當的操控條件下，如在圖 7 使二極體之端電壓介於 V_1 與 V_2 間，此元件可出現負微分電阻的現象，即 $r_d \equiv dV/dI < 0$ 。負微分電阻表示對該工作點附近的交流訊號而言，元件不但不損耗能量，反而會回饋能量到電路系統中。由於甘恩二極體具有這個特殊的性質，它被廣泛應用於製作微波至太赫茲波 (THz) 產生器。圖 8 為一簡化之甘恩振盪電路。在電路的右半邊，甘恩二極體與一串接電阻 R 透過一射頻阻軛器(RFC)連接至一直流電壓源 V_b 。此處射頻阻軛器為一保護元件，用於阻隔射頻交流電流進入直流電壓源。電路之左半部為一 LC 振盪電路，可產生交流電流 $i(t)$ 。此處假設射頻阻軛器的能量損耗可忽略； $r_d = -r(r > 0)$ ，在電壓 V_1 與 V_2 區間內 r 為一常數；甘恩二極體兩端的直流電壓為 V ，交流電壓為 $v_{out}(t)$ 。回答以下問題：

- (A) 若 $i(0) = 0, i'(0) = \alpha, i \ll I$ ，試求交流電流 $i(t)$ 。(9 分)
- (B) 說明使電路產生振盪的條件，並求出振盪頻率。(6 分)
- (C) 振盪產生時， LC 電路部分兩端的電壓降為 $v_{in}(t)$ (可視為一交流訊號輸入源)，考慮 $\sqrt{L/C} \gg R$ ，試求此時的 v_{out}/v_{in} (此為電壓增益)。(3 分)
- (D) 考慮電路振盪時，將二極體的直流電壓固定在 $V = (V_2 - V_1)/2$ ，試求甘恩二極體運作時所消耗的總功率。(7 分)

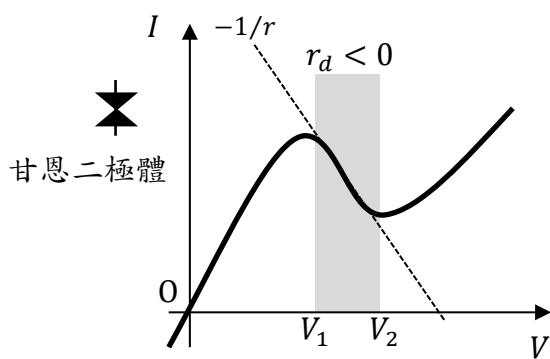


圖 7

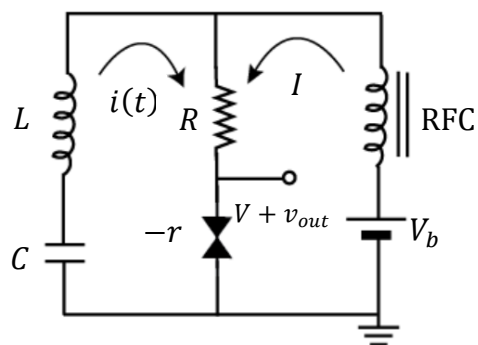


圖 8

2017 年第 18 屆亞洲物理及第 48 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選試題參考解答

第 1 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 13 分	寫出理想氣體方程式 $P_0 V_{A0} = P_0 V_{B0} = RT_0$ ， 算出 $V_{A0} = V_{B0} = 22.5\text{L}$ 。	2	
	寫出熱力學第一定律： $\Delta U_{A+B} = 5R\Delta T = Q - W$ 。	3	
	算出 $W = R\Delta T$ 。	2	
	求出 A、B 的溫度變化 $\Delta T = 6.71\text{K}$ 。	2	
	求出 A 部分的壓力 $P_A = 2480\text{Pa}$ 。	2	
	求出 B 部分的體積 $\Delta V_B = 0.552\text{L}$ 。	2	
(b) 12 分	寫出熱力學第一定律： $\Delta U_A = Q - W$ ， $(5R/2)\Delta T_A = 80.0 \times 4.18 - P_0(\Delta V_A)$ 。	3	
	由理想氣體方程式： $(7R/2)\Delta T_A = 80.0 \times 4.18$ 。	3	
	求得 $\Delta T_A = 11.5\text{K}$ 。		
	求出 $\Delta V_A = 0.946\text{L}$ 。	2	
	求出 $\Delta P_A = \Delta P_B = 0$ 。	2	
	求出 $\Delta V_B = 0$ ； $\Delta T_B = 0$ 。	2	

第 2 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 6 分	寫下 A 點經由 P 點至 B 點的光程： $f(x_1) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x_1^2} + \sqrt{h_1'^2 + (d-x_1)^2}}{(\lambda/n_1)}。$	1	
	由 $f'(x_1) = 0$ 得到 $\frac{x_1}{\sqrt{h_1^2 + x_1^2}} - \frac{d-x_1}{\sqrt{h_1'^2 + (d-x_1)^2}} = 0。$ 即 $\sin\theta_1 = \sin\theta_1'$	2	
	寫下 A 點經由 P 點至 B 點的光程： $f(x_1) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x_1^2}}{(\lambda/n_1)} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x_1)^2}}{(\lambda/n_2)}。$	1	
	由 $f'(x_1) = 0$ 得到 $\frac{n_1 x_1}{\sqrt{h_1^2 + x_1^2}} - \frac{n_2 (d-x_1)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x_1)^2}} = 0。$ 即 $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2。$	2	
(B) 4 分	寫出相鄰兩路徑的光程差： $\text{實線} \int_A^B d\varphi(\vec{r}) - \text{虛線} \int_A^B d\varphi(\vec{r})。$	2	
	由穩定相位條件得到 $\frac{2\pi dx \sin\theta_1}{(\lambda/n_1)} + \frac{2\pi dx \sin\theta_2}{(\lambda/n_2)} = 0。$ 即 $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2。$	2	
(C) 5 分	寫出折射時相鄰兩路徑的光程差，並由穩定相位條件得到 $\frac{2\pi dx \sin\theta_1}{(\lambda/n_1)} + \frac{2\pi dx \sin\theta_2}{(\lambda/n_2)} + d\Phi = 0，$ 即 $n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1 + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\Phi}{dx}。$	3	
	寫出反射時相鄰兩路徑的光程差，並由穩定相位條件得到 $\frac{2\pi dx \sin\theta_1'}{(\lambda/n_1)} + \frac{2\pi dx \sin\theta_1}{(\lambda/n_1)} + d\Phi = 0，$ 即 $n_1 \sin\theta_1' = n_1 \sin\theta_1 + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\Phi}{dx}。$	2	
(D)(a) 3 分	由(c)中廣義化反射定律得： $\sin\theta_1' = \sin\theta_1 + \alpha。$	1	
	求出反射光的條件： $\theta_1 > \sin^{-1}(1 - \alpha)。$	2	
(D)(b) 7 分	由廣義化折射定律得： $n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1 + \alpha。$	1	
	求出 $n_1 < n_2$ 時有全反射的條件： $n_2 - \alpha < n_1，且 \theta_1 > \sin^{-1}[(n_2 - \alpha)/n_1]。$	4	
	求出臨界入射角 $\theta_c = \sin^{-1}[(n_2 - \alpha)/n_1]。$	2	

第 3 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 6 分	將穩態解 $Ae^{i(\omega t - \phi)}$ 帶入微分方程式 $M \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F_0 e^{i\omega t}$ 得 $\{-M\omega^2 + bi\omega + k\}Ae^{i(\omega t - \phi)} = F_0 e^{i\omega t}$ 。	2	
	求出 $A(\omega) = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b/M)^2 \omega^2}}$ 。	2	
	求出 $\phi = \tan^{-1} \frac{(b\omega/M)}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ 。	2	
(b) 4 分	振幅最大時之角頻率： $\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$ 。	2	
	$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - (b^2/2M^2)} \approx \omega_0$ 。	2	
(c) 9 分	寫出受磁力後之共振角頻率 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{k - \partial F_z / \partial z}{M}}$ 。	2	
	寫出共振角頻率的變化 $\Delta\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M}} - \sqrt{\frac{k}{M}} = \omega_0 \left(\sqrt{1 - \frac{\partial F_z / \partial z}{k}} - 1 \right)$ 。	1	
	展開到 $\partial F_z / \partial z$ 的一階得 $\Delta\omega \cong -\omega_0 (\partial F_z / \partial z) / (2k)$ 。	2	
	由 $U = -mH_z$ ，求出探針受到的磁力 $F_z = m \partial H_z / \partial z$ 。	2	
	求出 $\Delta\omega \cong -\frac{\omega_0 m}{2k} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) = -\frac{\omega_0 m a}{k}$ 。	2	
(d) 6 分	寫出 $H_z \propto -\left\{ \frac{x}{x^2 + z^2} + \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + z^2} \right\}$	2	
	求出 $\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \approx \left\{ \frac{2x}{[x^2 + z^2]^2} + \frac{2(x_0 - x)}{[(x_0 - x)^2 + z^2]^2} \right\}$	1	
	判斷區域 I 為亮階	1	
	判斷區域 II 為暗階	1	
	判斷區域 III 為亮階	1	

第 4 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 6 分	寫出圓球底部之速度 $\vec{u}$ 為 $\vec{u} = \vec{v} + \vec{\omega} \times (-R\hat{z})$ 。	2	
	代入初值條件，求得 $\vec{u}_0 = \omega_0 R(-\hat{x} + 3\hat{y})/\sqrt{2}$ 。	2	
	$u_0 = \sqrt{5}\omega_0 R$ 。	1	
	$\hat{u}_0 = (-\hat{x} + 3\hat{y})/\sqrt{10}$ 。	1	
(b) 4 分	寫出圓球質心的運動方程式 $m \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{F} = -\mu_k mg \hat{u}$ 。	2	
	寫出圓球繞質心轉動的運動方程式 $mk^2 \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\tau} = (-R\hat{z}) \times \vec{F} = \mu_k mg R \hat{z} \times \hat{u}$ 。	2	
(c) 5 分	寫出 $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (-R\hat{z})$	1	
	求出 $\frac{d\vec{u}}{dt} = -\mu_k g \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right) \hat{u}$	2	
	求出 $\vec{u}(t) = (u_0 - \gamma \mu_k g t) \hat{u}_0$ 。	2	
(d) 3 分	求出圓球開始做純滾動之時刻 $T = \frac{2\sqrt{5}\omega_0 R}{7\mu_k g}$ 。	3	
(e) 7 分	將(b1)式對時間積分一次得： $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \mu_k g t \hat{u}_0$ 。	2	
	再次積分得 $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} \mu_k g t^2 \hat{u}_0$ 。	2	
	帶入初值條件(a2)與(a3)得 $\vec{r}_T = \vec{r}(T) = \frac{u_0}{\gamma \mu_k g} \left(\vec{v}_0 - \frac{u_0}{2\gamma} \hat{u}_0 \right)$ 。	1	
	求出 $\vec{r}_T = \frac{\sqrt{10}(\omega_0 R)^2}{49\mu_k g} (\hat{x} + 11\hat{y})$ 。	2	

第 5 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A)(a) 6 分	求出圓形線圈中央之磁場為 $\frac{\mu i a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$	2	
	求出通過金屬環之磁通量為： $\Phi = \frac{\mu N \pi a^4}{2(a^2+z^2)^{3/2}} I(t)$	2	
	求出互感 $M(z) = \frac{\mu N \pi a^4}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$	2	
(A)(b) 5 分	列出通過長 dz 、半徑 r 之圓柱面(包括兩端之截面)之磁通量為零 $dz 2\pi r B_r(z, r) + \pi r^2 B_z(z + dz, r) - \pi r^2 B_z(z, r) = 0$	2	
	得出 $B_r(z, r) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(z, r)}{\partial z}$	2	
	求出 $B_r(z, r) \approx \frac{3\mu N I(t) a^2 z r}{4(a^2+z^2)^{5/2}}$	1	
(B)(a) 6 分	寫出金屬環中之感應電動勢 $-M(z)\omega \cos \omega t I(z)$	1	
	用 Kirchoff's law 寫下電路方程式： $Ri + L \frac{di}{dt} = -M(z)\omega \cos \omega t I(z)$	2	
	求出 $i(t) = -\frac{M\omega I(z)}{R^2 + \omega^2 L^2} [R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t]$	2	
	求出 $\tan \delta = \frac{R}{\omega L}$ 。	1	
(B)(b) 8 分	寫出螺線管及金屬環中之電路方程式： $(i\omega L_0 + R_0)i_1 + i\omega M i_2 = V_0$; $i\omega M i_1 + (i\omega L)i_2 = 0$ 。	3	
	求出 $I(z) = \frac{V_0}{\sqrt{R_0^2 + \omega^2 L_0^2 \left(1 - \frac{M^2}{L L_0}\right)^2}}$	3	
	說明 $I(z)$ 隨 z 增加而遞減	2	

第 6 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 9 分	用 Kirchoff's law 寫下左半邊的電路方程式： $\frac{\int i dt}{C} + L \frac{di}{dt} + R(I + i) + [V_1 - r(I + i)] = 0$	2	
	說明直流分量抵消： $RI + (V_1 - rI) = 0$	1	
	微分求得二階微分方程式： $L \frac{d^2 i}{dt^2} + (R - r) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$	1	
	寫出微分方程式的一般解： $i(t) = \alpha_1 e^{(-\xi+s)t} + \alpha_2 e^{(-\xi-s)t}, s = \sqrt{\xi^2 - \omega_0^2}$	2	
	帶入初始條件 $i(0) = 0, i'(0) = \alpha$ 求得電流： $i(t) = (\alpha/s) e^{-\xi t} \sinh(st)$	3	
(b) 6 分	寫出第 1 個產生振盪的條件(電路能量不損耗)： $\xi \leq 0 \Rightarrow R \leq r$ 。	2	
	寫出第 2 個產生振盪的條件(s是純虛數)： $< \omega_0 \Rightarrow R < r + 2\sqrt{L/C}$	2	
	求出振盪頻率： $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$	2	
(c) 3 分	寫出 $v_{out}/v_{in} = r/(r - R)$	4	
(d) 7 分	說明振盪交流電壓振幅最大為 $(V_2 - V_1)/2$ ，振幅超過時 r_d 變成正值，振盪振幅飽和。	1	
	求出 $P_{DC}^{Gunn} = [(V_2 - V_1)/2] \{ [V_b - (V_2 - V_1)/2] / R \}$	3	
	求出 $P_{AC}^{Gunn} = \langle (\Delta V)(\Delta I) \rangle = \langle iv \rangle = -(V_2 - V_1)^2 / (8r)$	3	