2018 年第 19 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2017 年 11 月 11 日
13：30~16：30
考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

2018 年第 19 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、 如圖 1 在自行車的輪框上裝置一磁石，在車架上裝置一磁感應器，每當磁石隨輪旋轉而通過感應器時，感應器即傳送一訊號給車速表，如此就構成了可以顯示時速的自行車車速表。若磁石質量為 10 公克，車輪半徑為 60 公分，磁石安裝位置距輪軸 40 公分，當每秒傳送的訊號數為 2，則其車速為__(1)__km/h；磁石所受的向心力為__(2)__N。

圖 1

二、 在 20℃時將容量為 250cm^{3}的玻璃瓶裝滿水(滿到再增加任何一點都會溢出)。現將水與瓶一起加熱到 50℃，則會溢出__(3)__cm^{3}的水。(水在 20℃的受熱體膨脹係數為 0.21×10^{-3} K^{-1}，玻璃在 20℃的線膨脹係數為 0.5×10^{-6} K^{-1})

三、

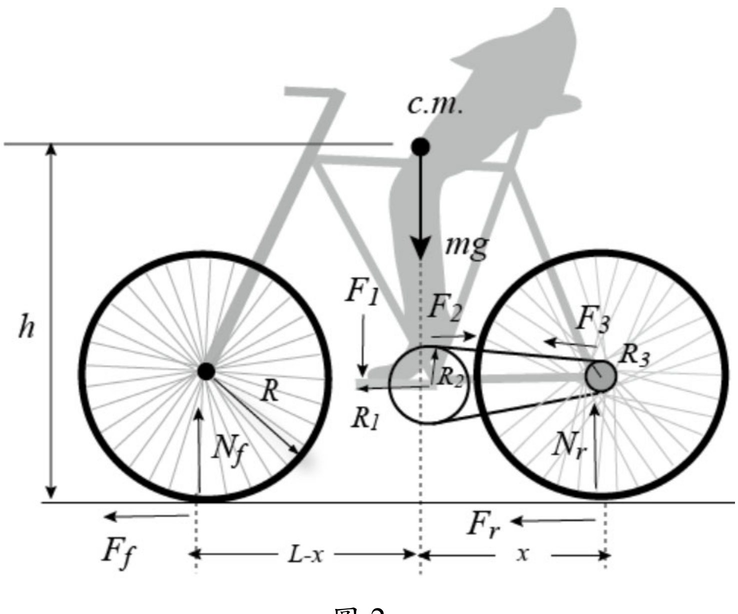
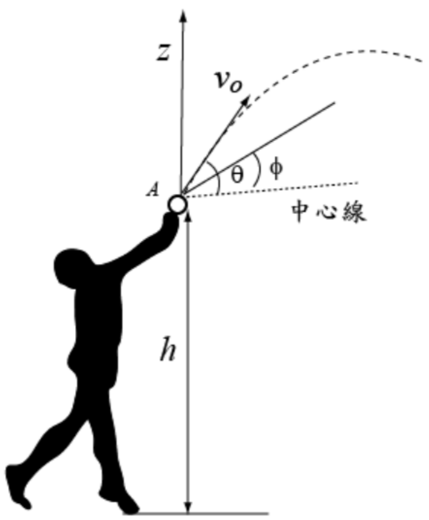


圖 2

圖 2 為一簡化之腳踏車與騎士受力圖。此處N_f，N_r分別為地面施於前輪與後輪的正向力，F_f，F_r分別為前輪與後輪所受平行於地面的力。整個系統總重量為mg，

質心(c.m.)距地面垂直之距離為h，質心距前輪與後輪與地面接觸點之水平距離分別為 $L-x$與x。騎士腳施力F_1垂直於踏板上，曲柄長度為R_1，前齒輪盤徑為R_2，後飛輪盤徑為R_3，輪圈半徑為R。F_2與F_3分別為鍊條對齒輪盤與飛輪盤之施力。回答下述問題。(A) F_r提供腳踏車前行之動力，F_r必須克服重力，內部與外部摩擦力，空氣阻力，而F_r可由內力F_1透過齒輪與飛輪傳動所提供。試問F_r/F_1比值為何<u>(4)　　　</u>？(以R_1、R_2、R_3與R表示) (B) 現在考慮腳踏車行進中緩慢煞車，不踩踏板，(F_1為零, 即不考慮系統內力)，假設前輪與後輪鎖死不轉動，僅考慮F_r與F_f(輪胎與地面之摩擦力)，設輪胎與地面動摩擦係數為μ_k，當系統處於力矩平衡時，求N_f與N_r<u>　　(5)　　</u>。(注意F_r與F_f方向的改變)

四、 在鉛球運動中，運動員在投擲圈內單手將鉛球從肩部推出鉛球(如圖 3 所示)，鉛球擲出後須落於扇形落地區內，方視為有效試擲，丈量成績以鉛球落地痕跡的最近點取直線量至投擲圈內緣，丈量線應通過投擲圈圓心。鉛球質量為$m=7.2\text{kg}$，投擲圈半徑$R=1\,m$，扇形區邊線延長應通過投擲圈圓心 O，圓心角約為35°(如圖 3 所示)。考慮運動員將鉛球擲出時鉛球位於投擲圈內緣 A 點中心線上，鉛球離手距地面為$h=2\text{m}$，速度為$\vec{v}_0=12\,\text{m/s}$與水平面夾角為$\theta=45°$，但與水平面中心線夾角為ϕ。當$\phi=10^{\circ}$時，求鉛球飛行距離為<u>　　(6)　　</u>m。為使鉛球落於落地區，求最大$\sin\phi$值為<u>　　(7)　　</u>。



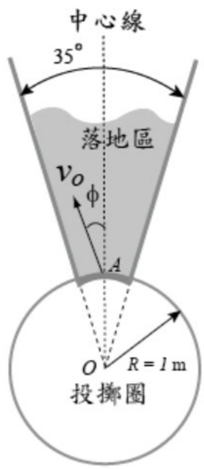


圖 3

五、 如圖 4 所示，一氣體容器的下方接上一鉛垂剛性細管，細管內有質量為m的活塞，細管的截面積為A。容器、剛性細管及活塞皆為絕熱的物質所製。活塞的上端在位置$x=0$時，容器內理想氣體的體積為V_0，氣體壓力恰與容器外的大氣壓力P_0相同。已知容器內氣體的體積V與溫度T遵守TV^{β}為常數的規律，而β為一常數。求容器內氣體的體積V與壓力P所遵守的規律____(8)____。
若活塞與剛性細管管壁之間的摩擦力可忽略，重力加速為g，重力造成空氣壓力隨高度的變化可忽略，則活塞在力平衡位置時，其上端位置x_0的表達式為$x_0=$____(9)____。
若活塞在x_0的上下進行小幅度的振盪，振盪的週期為T，求T的表達式 (設$mg \ll P_0A$)，$T=$____(10)____。

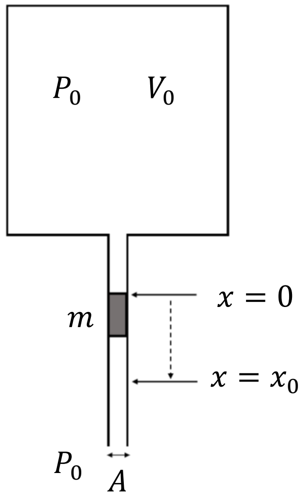


圖 4

六、 某一行星之衛星質量為M，繞行星作半徑為R、速度大小為v_0的圓周運動，假設有一彗星，質量為m，沿著衛星運動的方向從後方撞上，並掉落在此衛星上。此過程可視為完全非彈性的一維碰撞，且衛星與行星之間的重力忽略不計，即在碰撞發生前衛星與彗星的速度大小不變。若碰撞後，此衛星並未脫離行星的重力場，則彗星的速度必須小於____(11)____（以M、m、v_0表示）。若碰撞後的瞬間，此衛星速度大小增加了 5%，則此衛星繞行星運行的軌跡與原軌道偏離最大的程度為____(12)____%？

七、 日全蝕的成因可以用下列示意圖(圖 5)來說明：

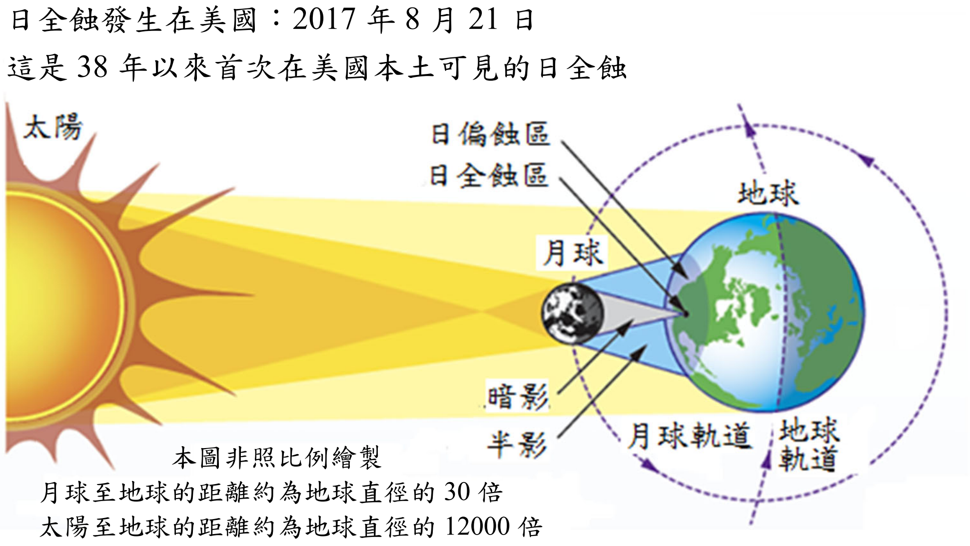


圖 5

由於月球繞地球的軌道面與地球繞太陽的軌道面有五度(5°)的夾角，因此不是每個月都會發生日蝕。

今年八月二十一日(2017.08.21)在美國許多地方可以看見日全蝕，日全蝕發生的地點及時間(以美國東部夏令時間來標示)如圖 6 灰色帶區所示：

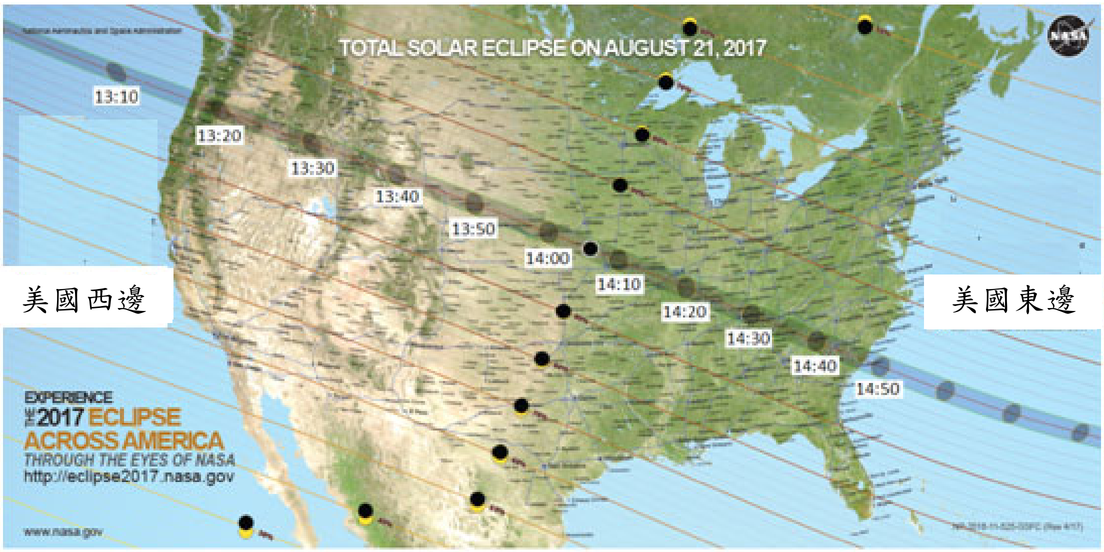


圖 6

已知月球、地球與太陽的半徑分別為$R_M = 1.737 \times 10^3$ km、$R_E = 6.37 \times 10^3$ km及$R_S = 6.96 \times 10^5$ km 。若發生日全蝕時，地球中心與太陽中心的距離為$D_{ES} = 1.50 \times 10^8$ km，則月球中心與地球中心的距離$D_{ME} \leq$ ____(13)____ km。

在地球上觀測到的月球與太陽的軌跡是由東往西，而由圖 6 可知日全蝕的軌跡卻大致是由西向東。

為了簡化計算，我們假設月球繞地球的軌道與地球繞太陽的軌道都在同一平面上，且地球自轉軸垂直此平面。以地球為靜止坐標，利用下列示意圖(圖 7)及提示，估算每十分鐘日全蝕在地球表面由西向東移動的距離：____(14)____ km。

（提示：已知地球繞太陽旋轉方向、月亮繞地球旋轉方向均與地球自旋方向大致同向。相對於遠處恒星，地球自旋角速度為$\omega = \frac{2\pi \times 366}{T_0 \times 365}$，此處$T_0 = 86400$s為一太

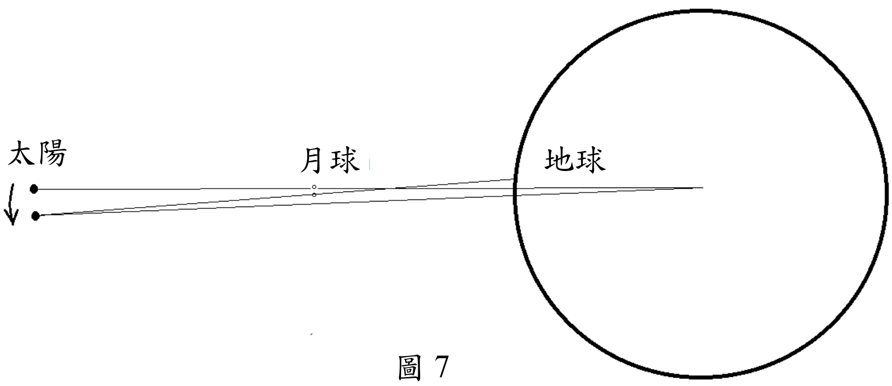


圖 7

陽日的平均時間；地球繞太陽旋轉角速度為$\Omega_{ES}=\frac{2\pi}{T_0\times365}$；月亮繞地球旋轉角速度為$\Omega_{ME}=\frac{2\pi}{T_0\times27.3}$，又設此時月球中心與地球中心的距離為$D_{ME}=3.75\times10^5$ km。）

八、如圖 8 所示，有一質量為m、半徑為R的鋼珠，在一固定的斜面上，由甲端從靜止開始向乙端作純滾動運動，通過乙端後繼續向地面作斜拋運動。已知斜面甲端比乙端高h，乙端比水平地面高H，斜面長度為$2h$，鋼珠繞直徑的轉動慣量為$2mR^2/5$。設重力加速度為g，且$R\ll H$，則小圓球離開乙端前的加速度量值為____(15)____，即將觸及地面時的垂直速度量值為____(16)____。

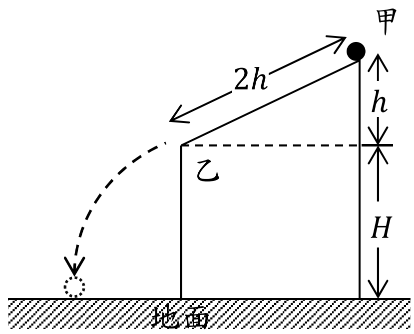


圖 8

九、一上下不同截面積的直立氣缸如圖 9 所示，上活塞的截面積為A_1、重量為W_1，下活塞的截面積為A_2、重量為W_2，兩活塞間以彈簧相連。氣缸內裝有理想氣體，氣缸置於壓力為P_0的大氣中。當氣缸內氣體的溫度為 800 K 時，彈簧增長了$x=5.0$cm，此時上下活塞距氣缸寬狹交接處均為15 cm，則氣缸內理想氣體的壓力為若干？____(17)____請以P_0、W_1、W_2、A_1及A_2表示之。

將氣缸內溫度由 800 K緩緩下降，發現彈簧伸長量從原來5.0cm漸減，最後上活塞降至氣缸寬狹交接處而被撐住。已知$A_1=40\text{cm}^2$，$A_2=20\text{cm}^2$，$W_1=W_2=20\text{N}$，$P_0=1.0\times10^5\ \text{N/m}^2$。若忽略氣缸及彈簧冷縮熱漲效應，則需繼續降至何溫度時彈簧伸長量恰為 0？____(18)____

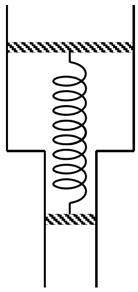


圖 9

十、脈衝星（pulsar）是恆星演化末期的產物，是一種高速自轉、質量密度極大的中子星（neutron star），由於內部有極強的磁場（如地磁），帶電粒子在中子星內的運動，會造成電磁波由磁極兩端輻射出去。脈衝星的自轉軸與磁軸一般而言並不相同，所以可以透過觀測其輻射出的電磁波來測量脈衝星的自轉週期（如燈塔一般）。今有一脈衝星，測量到其自轉週期為2.16×10^{-2}s。如果此脈衝星是由太陽演化而來，且假設演化過程中太陽質量不變，而且為密度均勻的球體。（太陽質量為2×10^{30} kg，半徑為1.4×10^6km；質量為M、半徑為R的球體之轉動慣量為$2MR^2/5$，重力常數$G=6.67\times10^{-11}\ \text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$）此脈衝星質量密度最小為____(19)____。由於幅射出電磁波，脈衝星能量因而有所損耗，假設損耗的能量由轉動動能來提供。若觀測到輻射電磁波的總功率為 10^{30} 瓦特，假設半徑不變，則此脈衝星轉動角速度的時變率為____(20)____。

十一、　考慮一密度均勻，質量為M，半徑為R的星體。欲計算該星體的重力位能U，可以假想將構成該星體的物質逐層加至半徑為 r 的球狀準星體表面所作的功，並讓r由$r=0$ 逐漸增加到$r=R$。試計算U，答案以萬有引力常數G、M和R表示。

$U=$____(21)____;假設該星體的組成物質粒子平均質量為m,可視為理想氣體，且該星體形成時,有一半的重力位能轉換為星體內能,另一半則以輻射形式散失。試求該星體的溫度T，答案以G、M、R、m和波茲曼常數k_B表示。

$T=$____(22)____。

十二、　如圖 10 所示，一質量為m、上方挖空成半徑為R之半球面的木塊置於一水平面上,今有一質量為m之質點自球面邊緣處由靜止自由滑落，假設所有界面的摩擦力皆可忽略，試問質點達最低點時，所受來自木塊正向力的量值為____(23)____。(設重力加速度為g)

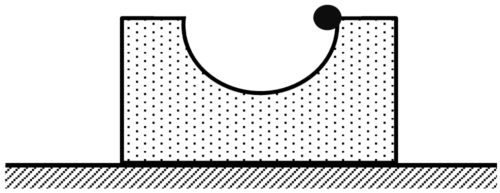


圖 10

十三、　如圖 11 所示，一質量為m之長直木條經由滑輪連接兩彈簧與不可伸縮之繩索，左右對稱做水平吊掛。兩彈簧之彈力常數各為k與$2k$,滑輪的半徑為R、轉動慣量為$\frac{1}{2}MR^2$，假設彈簧與繩索的質量可忽略，且摩擦力損耗的功亦可忽略，今使木條維持水平並在鉛直方向運動，試問其振盪週期為

____(24)____。

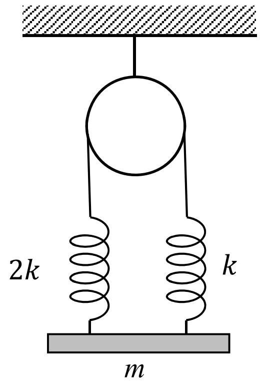


圖 11

十四、　如圖 12 所示，一截面積為a之U型管，某生將總長度為$L(L^2 \gg a,\ L \gg b)$、密度為ρ之液體注入時，不小心在距離液體左端長$L/3$處產生一氣泡，若此氣泡在大氣壓力下長度約為ℓ。設大氣壓力為P_0，則將U型管置放在水平面上平衡時，右管液體達到之最大高度h為____(25)____。

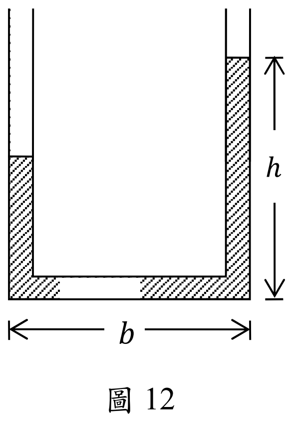


圖 12

十五、 表面張力是一種作用在兩種不同物質的界面之張力，其作用方向平行於界面的切線方向，傾向於減小界面的面積。如圖 13 所示，考慮兩個玻璃平板間的軸對稱液體橋。已知兩平板的距離$h \ll R_2$，液體橋在水平及垂直方向的曲率半徑分別是R_1及R_2。環境中的大氣壓為P_2，且液體中有大致均勻的壓力P_1。若液體與氣體間的表面張力為γ_1，液體與固體間的表面張力為γ_2，固體與氣體間的表面張力為γ_3。

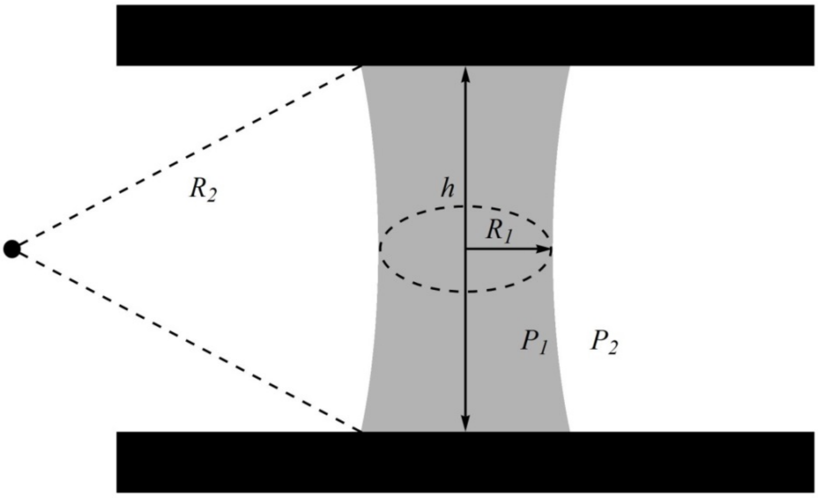


圖 13

求$(\gamma_3 - \gamma_2)/\gamma_1 =$____(26)____(以$h, R_1, R_2$表示)及$P_2 - P_1 =$____(27)____(以$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, h, R_1, R_2$表示)。

十六、 本題假設水為密度為ρ之不可壓縮的理想流體，重力的效應很小可忽略。如圖 14 所示，考慮在大氣壓力為P_0下，一個固定不動的開口大容器，其內水流速度可近似為零，頂部水面高度可近似為固定不變，底部有一厚度可忽略、橫截面積為A的排水小孔。當水流處於穩流狀態時，一流線在小孔內緣處的液壓若為P_1，則依白努利定理，在小孔外壓力為P_0處(緊鄰小孔外緣)的流速u須滿足$P_1 - P_0 = \frac{1}{2}\rho u^2$ (忽略重力項的貢獻)的關係。

由觀察可發現，水流在流出小孔後，其橫截面積會縮小至一極小值α，各流線在此截面之速度向量，方向彼此平行一致，且流速均為u (忽略重力的效應)。依據上述，容器中之水每單位時間流失之淨動量的量值$\dot{p}$為____(28)____(以ρ、u、α、A表示)，而比值$r = \alpha/A$ 的範圍應為____(29)____。

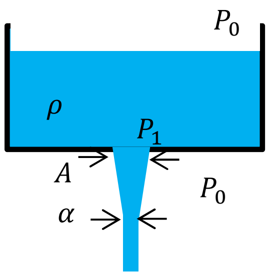


圖 14

十七、　一立方體物塊靜置於一裝有水和油的圓柱形容器中，物塊邊長為 a，圓柱形容器的底面截面積為$3a^2$。水、油、物塊的密度，分別為d, $0.8d$, 和$2d$。如圖 15 所示，若起始時，水和油層的深度分別為$0.5a$和a（假設水和油完全不互溶，且液體與物塊表面摩擦力可以忽略），試問將物塊緩慢完全提離液面所須作功的最小值為何___(30)___？（以a, d,及重力加速度g表示。）

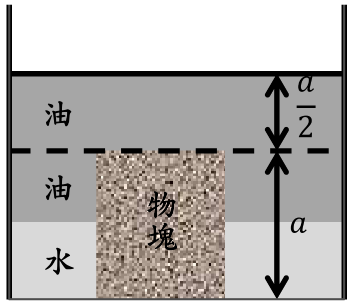


圖 15：起始時物塊與液體之狀態

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、　一質量為$m(=1\times10^{24}\ \mathrm{kg})$的行星繞行一恆星運行，其繞行的橢圓軌道如圖 15 軌跡所示，圖中每一方格(約$1\mathrm{cm}\times1\mathrm{cm}$)的邊長均為$1.5\times10^{8}\ \mathrm{km}$，O為橢圓的中心，A、B 和 C 在行星軌道上；已知恆星質量M為行星的x倍，即$M=xm$，且恆星位置在 O 和 A 兩點之間，則：

(A) 恆星與 A 點的距離為何？橢圓軌道的離心率為何？(4 分)
(B) 此行星的運行週期為 300 天，則x的數值為何？ (3 分)
(C) 此行星在橢圓軌道上運行的角動量為何？ (4 分)
(D) 此行星在 B 和 C 點的速率各為何？(4 分)

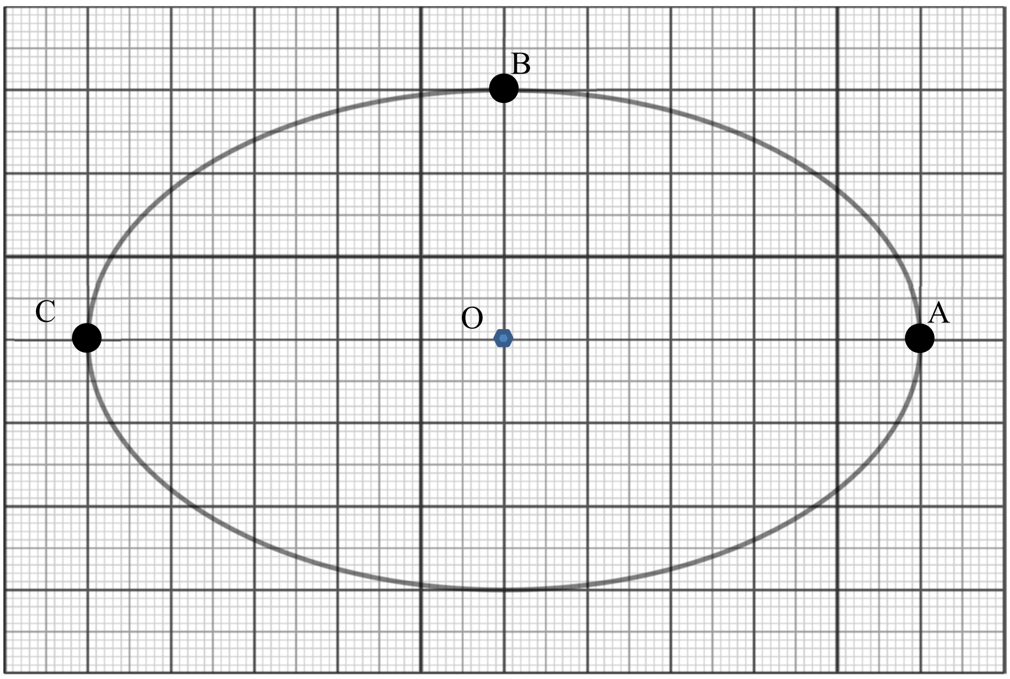


圖 16：行星運行之橢圓軌道。

二、$\boxed{\text{理想氣體定律；理想氣體內能；絕熱與等溫過程；熱力學第一定律}}$

如圖17所示，有兩個熱容量很小、尺寸和形狀完全相同、橫截面積為A的汽缸甲和乙。甲由熱的良導體製成，而乙由熱的良絕緣體製成。兩個汽缸的底部封閉，頂部開放，且都浸沒於絕對溫度固定為室溫 T_0 的水中，而大氣壓力固定為P_0。每個汽缸都充有氦氣(可視為理想氣體)，且配置有絕熱而無摩擦的活塞，並以連桿與淺盤連接。已知活塞－連桿－淺盤合計的重量為w_0，而最初處於熱力學平衡狀態時，缸內氦氣的絕對溫度都為T_0 ，兩個活塞比各自汽缸的底部都高出h_0。

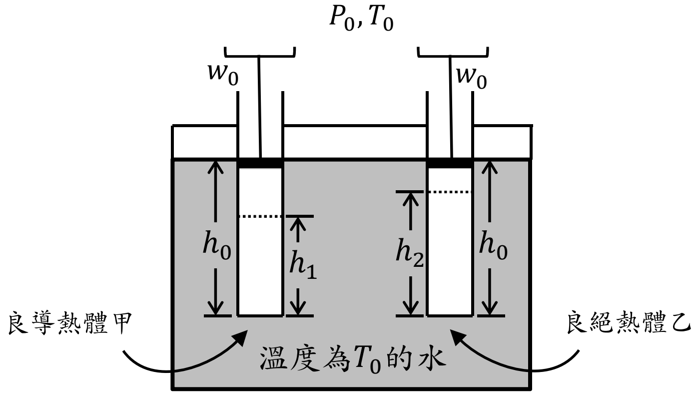


圖 17

假設在以下兩部分考慮的過程中，活塞都沒有高出水面，且氦氣與大氣的重力位能變化可忽略。

A部分(5分)

假設在甲和乙中的氦氣維持近乎平衡的狀態下，每次只將微量的沙粒靜置於每個淺盤上，以壓縮氦氣，直到盤內沙粒的總重量等於w_s為止。

(1)已知在整個壓縮過程中，甲和乙中氦氣的壓力P和體積V之間的關係為$PV^\gamma =$定值，試問甲和乙中氦氣的γ值(分別稱為γ_1和γ_2)各為何？(2分)

(2)設以h_1與h_2分別代表甲和乙中活塞的最終高度（從各自汽缸的底部算起），則最終高度與最初高度h_0的比值h_1/h_0與h_2/h_0各為何？(3分)

B部分(10分)

假設改為一次就將重量同為w_s的兩堆沙粒，分別靜置於甲和乙的淺盤上，以致活塞開始做加速度運動，並上下振盪，直到最終再度達到平衡狀態後停下。

(3)已知甲和乙中活塞的最終高度（從各自汽缸的底部算起）分別為H_1與H_2，則甲和乙中氦氣的內能變化量(分別以ΔU_1與ΔU_2代表)各為何？(4分)

(4)甲和乙中活塞的最終高度與其最初高度h_0的比值H_1/h_0與H_2/h_0各為何？(6分)

2018 年第 19 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題參考解答

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

十八、 (1) 27

(2) 0.63

十九、 (3) 1.6

二十、 (4) $\dfrac{R_1R_3}{RR_2}$

(5) $N_f=\frac{mg}{L}(x+\mu_k h)$， $N_r=\frac{mg}{L}(L-x-\mu_k h)$

二十一、 (6) 16.48

(7) 0.32

二十二、 (8) $PV^{\beta+1}=C_1C_2=\text{constant}$

(9) $x_0=\dfrac{V_0}{A}\left[(1-mg/(P_0A))^{-1/(\beta+1)}-1\right]=\dfrac{V_0}{A}\left[(1-mg/P_0A)^{-3/5}-1\right]$

(10) $T=2\pi\sqrt{\dfrac{3mV_0}{5A^2P_0}}$

二十三、 (11) $\{(\sqrt{2}-1)\,M/m+\sqrt{2}\}v_0$

(12) 23

二十四、 (13) 3.80×10^5

(14) 289

二十五、 (15) $5g/14$

(16) $\sqrt{g(5h/14+2H)}$

二十六、 (17) $P_0+(W_1+W_2)/(A_1-A_2)$

(18) 333.3K

二十七、 (19) $3\times10^{14}\mathrm{kg/m^3}$

(20) $-2.2\times10^{-21}\mathrm{rad/s^2}$

二十八、 (21) $-\frac{3GM^2}{5R}$

(22) $(GMm)/5k_BR$

二十九、 (23) $5mg$

三十、 (24) $2\pi\sqrt{\frac{3(m+\frac{M}{9})}{8k}}$

三十一、 (25) $(L-b)/2$

三十二、 (26) $h/2R_2$

(27) $\gamma_1(1/R_1-1/R_2)$

三十三、 (28) $\rho\alpha u^2$

(29) $\frac{1}{2}\leq r<1$

三十四、 (30) $1.65\,dga^4$

貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

第 1 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	列出$a^2 = b^2 + c^2$，	1	
	算出$c = 6.0 \times 10^{11}$ m，	1	
	列出離心率$e = c/a = 0.8$	1	
	算出$e = 0.8$.	1	
(B) 3 分	列出克卜勒第三定律：$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$	1	
	算出$x = \frac{4\pi^2}{Gm}\frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}} \times \frac{(7.5\times10^{11})^3}{(300\times24\times60\times60)^2}$ $= 3.7 \times 10^8$	2	
(C) 4 分	列出系統的角動量$L = \frac{2m}{T}\pi ab$	2	
	算出$L = \frac{2\times1\times10^{24}}{300\times24\times60\times60} \times \pi \times 7.5\times10^{11} \times 4.5 \times 10^{11} = 8.2\times10^{40}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$	2	
(C) 4 分	由角動量守恆求得 C 點的速率： $V_C = \frac{8.2\times10^{40}}{1\times10^{24}\times1.35\times10^{12}} \cong 6.1\times10^4$ m/s	1	
	求得 B 點到恆星的距離為$d = 7.5\times10^{11}$公尺	1	
	列出由角動量守恆 $L = m \times 7.5\times10^{11} \times V_B \times \frac{3}{5}$，	1	
	得出$V_B = \frac{8.2\times10^{40}}{1\times10^{24}\times7.5\times10^{11}\times\frac{3}{5}} \cong 1.8\times10^5$ m/s	1	

第 2 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A)部分 (1)2 分	等溫氦氣滿足理想氣體定律$PV/T_0 =$ 定值，即$\boxed{\gamma_1 = 1}$	1	
	絕熱氦氣滿足$PV^{\gamma_2} =$ 定值。$\boxed{\gamma_2 = 5/3}$。	1	
(A)部分 (2)3 分	由$PV^{\gamma} =$ 定值，得出 $\{P_0 + (w_0 + w_s)/A\}(h_f A)^{\gamma} = (P_0 + w_0/A)(h_0 A)^{\gamma}$	1	
	汽缸甲$\gamma_1 = 1$，得： $\boxed{\frac{h_1}{h_0} = \frac{P_0 + w_0/A}{P_0 + (w_0 + w_s)/A}}$	1	
	汽缸乙$\gamma_2 = 5/3$，得出： $\boxed{\frac{h_2}{h_0} = \left\{\frac{P_0 + w_0/A}{P_0 + (w_0 + w_s)/A}\right\}^{3/5}}$	1	
(B)部分 (3)4 分	甲汽缸中，氦氣的最終溫度T_1與最初溫度T_0相同，$\boxed{\Delta U_1 = \frac{3}{2} nR\Delta T = \frac{3}{2}\Delta(PV) = 0}$。	2	
	乙汽缸中，氦氣的最終與最初壓力分別為$\left(P_0 + \frac{w_0+w_s}{A}\right)$與$\left(P_0 + \frac{w_0}{A}\right)$，最終與最初體積分別為$(H_2 A)$與$(h_0 A)$。 $\Delta U_2 = \frac{3}{2}\Delta(PV)$ $= \frac{3}{2}\left[\left(P_0 + \frac{w_0+w_s}{A}\right)H_2 - \left(P_0 + \frac{w_0}{A}\right)h_0\right]A$	2	
(B)部分 (4)6 分	甲汽缸內的氦氣，其最初溫度與壓力，以及最終溫度與壓力，均與小題(2)相同，$\gamma = \gamma_1 = 1$。 $\boxed{\frac{H_1}{h_0} = \frac{1}{1 + w_s/(P_0 A + w_0)}}$	2	
	整個過程為絕熱，轉移的熱量$\Delta Q = 0$，故由熱力學第一定律可知能量必須守恆，$\Delta U_2 + (w_0 + w_s)(H_2 - h_0) = W_2 = (P_0 A)(h_0 - H_2)$	2	
	將(5)式的結果代入上式，化簡可得$\boxed{\frac{H_2}{h_0} = \frac{P_0 + w_0/A + 2w_s/(5A)}{P_0 + (w_0 + w_s)/A}}$	2	