

2018年第19屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第49屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2018年2月3日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 三、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t 為時間， x 為任意物理量)

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$, $f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$;

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} , \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} .$$

2. $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}$, $m \neq -1$;

$$\int (ax+b)^{-1} dx = (1/a) \ln(ax+b) ;$$

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1} ; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1} .$$

3. $\frac{de^{ax}}{dx} = e^{ax}$, $\frac{d \sin ax}{dx} = a \cos ax$, $\frac{d \cos ax}{dx} = -a \sin ax$

$$\int \sin ax \, dx = -(1/a) \cos ax , \quad \int \cos ax \, dx = (1/a) \sin ax$$

4. 當 $|x| \ll 1$, $(1+x)^\alpha \approx 1+ax$,

$$e^x \approx 1+x , \quad \sin x \approx x , \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} .$$

5. 線性、常係數、齊次一階微分方程式 $ax'(t) + bx(t) = 0$

的一般解形式為 $x(t) = \alpha e^{st}$,

其中 s 是右列一次方程式 $as + b = 0$ 的根 ,

而 α 是積分常數 , 可由初始條件 $x(0)$ 決定。

6. 線性、常係數、齊次二階微分方程式 $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$

的一般解形式為 $x(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t}$,

其中 s_1, s_2 是右列二次方程式 $as^2 + bs + c = 0$ 的根 ,

而 α_1, α_2 是積分常數 , 可由初始條件 $x(0), x'(0)$ 決定。

2018年第19屆亞洲物理及第49屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、卡諾熱機

- (A) 卡諾熱機在兩個不同溫度的熱庫(heat reservoir)循環運作時，其過程均為可逆。考慮如圖 1 所示的卡諾熱機，熱機由二可逆等溫過程 ($a \rightarrow b$; $c \rightarrow d$) 和二可逆絕熱過程 ($b \rightarrow c$; $d \rightarrow a$) 組成。試計算每一過程中熱機內氣體(假設為 n 莫耳的理想氣體)熵的變化量。(以氣體壓力(P)、體積(V)、溫度(T)和其他相關常數表示。)(8 分)

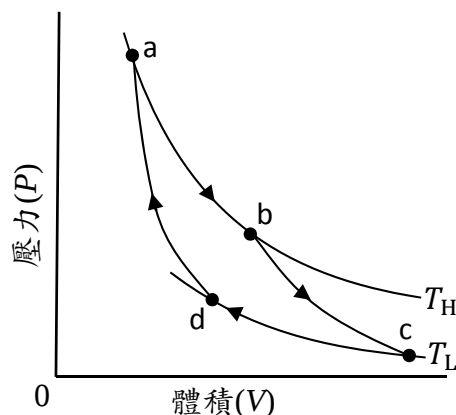


圖 1

- (B) 現考慮兩個具有相同熱容量 C 的物質，其起始溫度分別為 T_1 和 T_2 。今有一卡諾熱機以此二物質為其低溫和高溫熱庫，並假設卡諾熱機運行一循環時，二熱庫的溫度變化，遠小於其個別的溫度值。問此二物質的最終溫度為何？過程中卡諾熱機可作的最大功為何？(9 分)
- (C) 現考慮三個具有相同熱容量 C 的物質，其起始溫度分別為 $T_1=100\text{ K}$ ， $T_2=300\text{ K}$ 和 $T_3=300\text{ K}$ 。假設我們可以利用前述的卡諾熱機在物質 1 和 2 之間運轉輸出功，並以另一在物質 1 和物質 3 之間運轉的卡諾熱機，將所輸出的功完全用於提高物質 3 的溫度。問：
- 物質 1 所能達到的最低溫度 T_L 為何？(2 分)
 - 物質 3 可以達到的最高溫度 T_H 為何？(6 分)

二、反射光柵

光柵乃由周期性的結構(如狹縫)所組成，圖 2 為入射光束照射在一「反射光柵」的簡圖。我們常用單位長度 (公尺)內有 n 個周期性結構來描述光柵，即每個周期性結構寬度為 $1/n$ ，以下簡稱為光柵的狹縫密度。

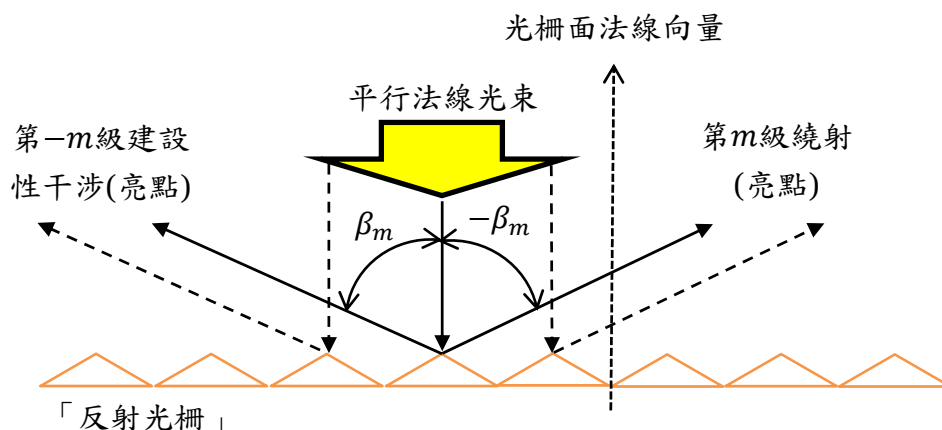


圖 2：入射光束正向入射光柵

- (A) 當入射光束以平行法線的方向入射「反射光柵」，則第 m 級繞射的角度為 β_m ，第 $-m$ 級繞射的角度為 $-\beta_m$ (相對於法線為逆時針方向者為正、順時針方向者為負)，兩者都在足夠遠的屏幕上產生亮點，證明 $\beta_m = \sin^{-1}(nm\lambda)$. (5 分)
- (B) 一「反射光柵」每公分有 200 條狹縫，由(A)之條件，當入射光波長為500 nm時，估算此「反射光柵」可以看到的最大繞射級數 m 值為何？(3 分)

考慮波長分別為 λ 與 $\lambda' (= \lambda + \Delta\lambda)$ 的兩個光波，當兩者經光柵 m 級繞射而產生之干涉亮紋，恰好都落在另一者所產生的暗紋位置上時，我們稱這兩個光波的 m 級繞射恰

可分辨，由此我們可得出光柵的 m 級繞射解析度 $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ 。

- (C) 考慮一個寬度為 W 、單位長度有 n 條狹縫的光柵，由(A)小題之結果，求光柵的 m 級繞射解析度 R 。(6 分)
- (D) 鈉燈所發出的黃光有兩個波長，一為589.00 nm，另一為589.59 nm，如果要在第一級繞射時能夠分辨此二波長，則寬度為 1 公分的「反射光柵」最少需要有幾條狹縫？(3 分)

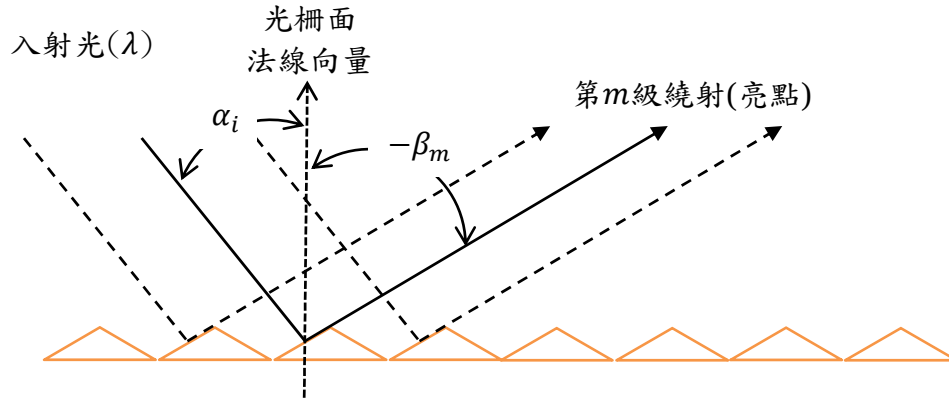


圖 3：入射光束與法線夾一角度 α_i 照射光柵(但垂直於狹縫方向)

- (E) 如圖 3 所示，入射光束以垂直於狹縫的方式照射（反射面與光柵的狹縫垂直，圖 3 中狹縫的方向垂直於紙面），且相對於「反射光柵」之法線方向以角度 α_i 射向光柵，因此產生第 m 級繞射，其角度為 $-\beta_m$ ，並在足夠遠的屏幕上產生亮點。已知光柵的狹縫密度為 n ，若 $m\lambda$ 可以寫為 α_i 、 β_m 、 n 的函數，即 $m\lambda = f(\alpha_i, \beta_m, n)$ ，求函數 $f(\alpha_i, \beta_m, n)$ 的表示式。(3 分)

- (F) 如圖 4 所示，若入射光束與狹縫方向垂直面間的夾角為 ϕ ，入射光與「反射光柵」之法線方向夾角為 α_i ，而第 m 級繞射的角度為 β_m 。已知光柵的狹縫密度為 n ，若 $m\lambda$ 可以寫成是 α_i 、 β_m 、 n 、 ϕ 的函數，即 $m\lambda = f(\alpha_i, \beta_m, n, \phi)$ ，求此函數 $f(\alpha_i, \beta_m, n, \phi)$ 。(5 分)

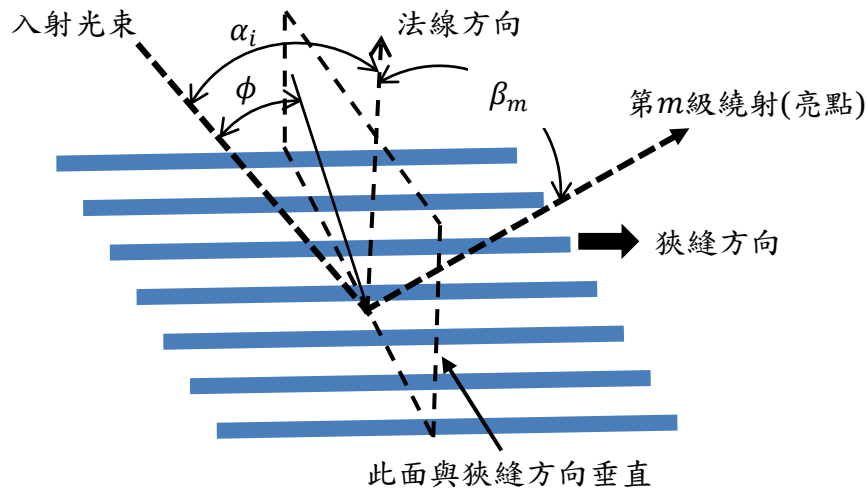


圖 4：入射光束與狹縫方向之間夾一角度 ϕ 照射光柵。

三、奈米管上之帶電質點在磁場中的運動

如圖 5 所示，考慮一個質量為 m 、帶正電荷 q 的質點被限制在半徑為 R_0 的圓柱面上運動，且空間中有均勻磁場 $\vec{B} = B\hat{x}$ 。

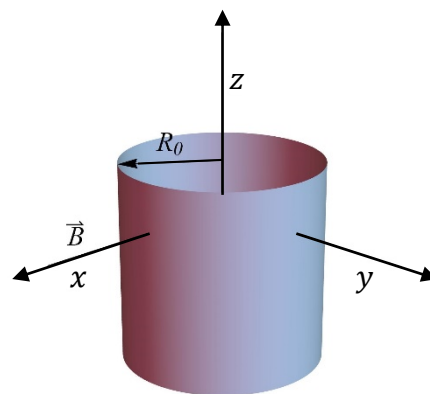


圖 5

- (A) 已知在圓柱座標中， $\hat{e}_s = \cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}$ 、 $\hat{e}_\phi = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$ 及 $\hat{z}$ 構成一組右手正交基底。 s, ϕ 其實就是一般的極座標，它們與平面直角座標的關係為 $x = s \cdot \cos\phi$ ， $y = s \cdot \sin\phi$ 。在圓柱座標中，質點的位置可表示為 $\vec{r} = R_0\hat{e}_s + z\hat{z}$ 。證明此質點所滿足之牛頓運動方程式，其 ϕ 分量可化簡為：
 $R_0\ddot{\phi} - \omega_c \cos\phi \dot{z} = 0$ ； z 分量則可化簡為：
 $\ddot{z} + \omega_c R_0 \dot{\phi} \cos\phi = 0$ ，其中 $\omega_c = qB/m$ 為此質點在均勻磁場中的迴旋角頻率。(8 分)
- (B) 承(A)小題，已知初始時($t = 0$)， $\phi(t)|_{t=0} = 0$ 、 $\dot{z}(t)|_{t=0} = R_0\omega_z$ ，證明 $\dot{z} + \omega_c R_0 \sin\phi = R_0\omega_z$ 。(3 分)
- (C) 承(A)、(B)小題，已知 $\dot{\phi}(t)|_{t=0} = \omega_\phi$ ，證明 $\dot{\phi}^2 + \omega_c^2 \sin^2\phi - 2\omega_c\omega_z \sin\phi - \omega_\phi^2 = 0$ 。(5 分)
- (D) 承(C)小題，若 ω_z 、 ω_ϕ 皆為定值， ω_c 要滿足什麼條件，質點才能像螺線一樣環繞圓柱運動？(5 分)
- (E) 承(C)小題，若 $\omega_z = 0$ ， ω_ϕ 為定值， ω_c 要滿足什麼條件，質點在圓柱上的運動軌跡才會是一條封閉曲線？(4 分)

四、母球與檯邊的斜向碰撞

如圖 6 所示，在水平撞球檯面上，一質量為 m 、半徑為 R 的剛體均勻母球最初做無滑動的純滾動，斜向以 $\vec{V} = V_x \hat{x} + V_y \hat{y}$ 的平移速度，與光滑無摩擦的檯邊瞬間發生碰撞。已知母球繞通過質心之轉軸的轉動慣量為 $I_c \equiv mk^2$ ，檯邊比檯面高出 $R + h$ ($R > h \geq 0$)。假設檯邊亦為剛體，且母球與檯邊發生彈性碰撞，檯邊在碰撞時只能施給母球水平方向(平行於 xy 平面)的衝力，試回答下列各題。

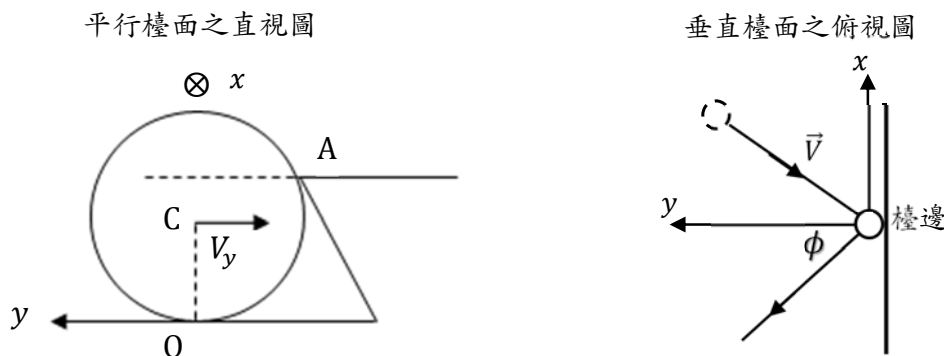


圖 6

- 母球在碰撞前之角速度的分量 ω_x 與 ω_y 各為何？(4 分)
- 若在碰撞時，檯邊施給母球之衝量的分量為 j_x 與 j_y ，則在碰撞後，母球之質心平移速度的分量 V'_x 、 V'_y ，與轉動角速度的分量 ω'_x 、 ω'_y 各為何？(8 分)
- 檯邊施給母球之衝量的分量 j_x 與 j_y 各為何？(8 分)
- 若母球在碰撞後之反射角(即母球平移速度與 y 軸的夾角)為 ϕ ，則 $\tan \phi$ 為何？(5 分)

五、電容器與電感器中的電磁感應

(A) 如圖 7 所示，一電容器由兩半徑為 a 之圓形金屬板組成，金屬板間的距離為 d ，且金屬薄板之厚度可忽略不計，此電容由長直導線自圓心向外連結。今將此電容器中插入一寬度 $a/2$ 為金屬圓環後(此圓環與上、下金屬板之相對位置之側視如圖 8 所示)，此電容器 C 再與一電阻 R 串連如圖 9 所示。在時間 $t = 0$ 時，電容器帶電荷 Q_0 ，開始接通開關 S ，此

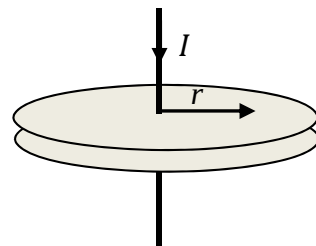


圖 7

時假設金屬板邊緣效應所造成電場的變化可不計，且 $d \ll a \ll \frac{c}{\omega}$ (c 為光速)，若空氣可以用真空電容率 ϵ_0 及磁導率 μ_0 描述，且 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ，試回答以下問題。

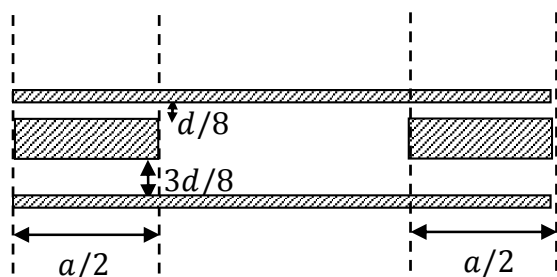


圖 8

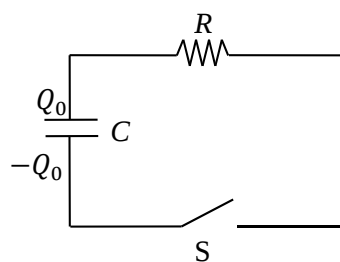


圖 9

- 試求電容器之電容 C 。(3 分)
- 此電路中 t 時刻之電流 $i(t)$ (以流入金屬板為正並以 C 、 R 表示)。(2 分)
- 求 t 時刻上圓形金屬板上、距離圓心 r 處之電流密度(通過單位長度之電流)(以 C 、 R 、 Q_0 表示)。(4 分)
- 試求電容器中距離中心軸 r ($r < a$)、下金屬板上方 z ($z < d$) 處(金屬環外)之感應磁場。並由此求出接通後到最後平衡由電容器流出去之總電磁能。(6 分)

(B) 如圖 10 所示，某生欲將電容器的電量傳到另一個電容器，因此他將圓形金屬板改成邊長為 b 之平行方形金屬板，金屬板間的距離仍為 d ，且金屬薄板之厚度可忽略不計，兩電容器經由兩半徑為 a 之半圓柱形金屬板相連。若在時間 $t = 0$ 時，左電容器帶電荷 Q_0 ，各金屬板上的電流皆為 0。假設金屬板邊緣效應所造成電場的變化可不計，且 $d \ll a \ll \frac{c}{\omega}$ ，試估計

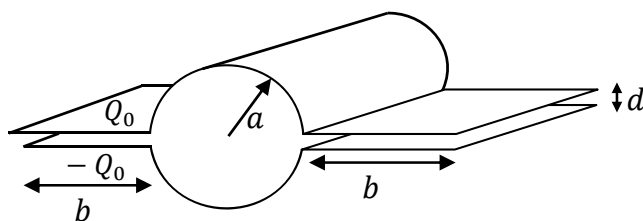


圖 10

- 電荷 Q_0 完全由左電容器轉移到右電容器所需之最小時間，(7 分)
- 單位時間流入圓柱中空腔之電磁能的最大值。(3 分)

六、無線電力傳輸

無線電力傳輸(Wireless Power Transfer, WPT)是指將電磁能藉由電磁效應傳輸到負載裝置的技術，在傳輸能量過程中不使用實體導線。WPT 的概念早於 1890 年就由特斯拉用共振變壓器(resonant transformer)所展示，稱為特斯拉線圈。WPT 近年來被應用於諸如手機、可攜式電腦及電動車中之無線充電裝置。目前短距(約小於 1 公尺) WPT 技術採用電感功率耦合傳輸(Inductive Power Transfer)的方式。本題將討論 WPT 相關的物理機制。考慮如圖 11 的電路：

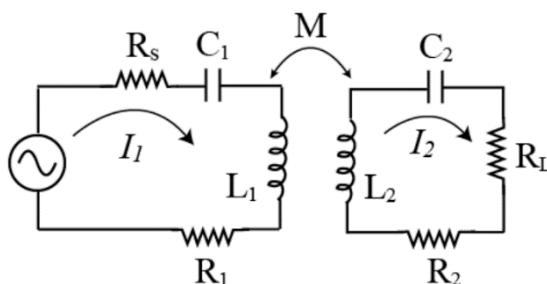


圖 11

圖中 I_1 與 L_1 ， I_2 與 L_2 為輸入端與輸出端中之交流電流與線圈自感，交流頻率 ω 約為 ~ 100 kHz， M 為兩線圈耦合之互感， R_s 為電壓源電阻， R_L 為負載電阻； R_1 與 R_2 為感應線圈之電阻。

(A) 互感 M 可表示為 $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ ，其中 k 代表兩線圈磁通量耦合係數。

證明 $k \leq 1$ 。(5 分)

(B) 考慮當此線圈形成耦合共振時，即 $\omega^2 L_1 C_1 = \omega^2 L_2 C_2 = 1$ ，求出加於負載 R_L 之功率 P_L 與輸入電流 I_1 之關係。(7 分)

(C) 計算此電路之能量轉換效率 $\eta (= P_L / \text{輸入功率})$ 。(5 分)

(D) 若 R_1, R_2, R_s, ω, M 皆為定值，定義參數 $\alpha = R_2(R_1 + R_s) / (\omega M)^2$ ，求 η 之極大值及此時 R_L / R_2 之比值(以 α 表示)。(8 分)

2018 年第 19 屆亞洲物理及第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選試題參考解答

第 1 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 8 分	寫出熱力學第一定律 $dQ = dU - pdV$	1	
	寫出理想氣體方程式 $pV = nRT$	1	
	結合熱力學第一定律及想氣體方程式寫出等溫過程中 $\Delta S = \int \frac{C_V}{T} dT + \int \frac{nR}{V} dV$	2	
	算出 $\Delta S_{a \rightarrow b} = nR \ln(V_b/V_a)$	1	
	算出 $\Delta S_{c \rightarrow d} = nR \ln(V_d/V_c)$	1	
	算出 $\Delta S_{b \rightarrow c} = 0$	1	
	算出 $\Delta S_{d \rightarrow a} = 0$	1	
(B) 9 分	寫出卡諾熱機可逆過程之條件: $dS_1 + dS_2 = \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$	2	
	由熱容量定義及能量守恆: $dQ = CdT \rightarrow \frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2}$	2	
	積分得出 $T_1 T_2 = \text{constant}$	2	
	求出最終溫度: $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$	1	
	求出熱機所能作的最大功 $W = C[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}]$	2	
(C) 8 分	得出 T_L 最低溫為 100 K	2	
	將(B)的結果推廣到 3 個物質: $T_1 T_2 T_3 = \text{constant}$	1	
	由能量守恆得出: $T_1 + T_2 + T_3$ 亦為一常數	1	
	得出 $T_1 + T_2 + T_3 = T_H + 2T_0$; $T_1 T_2 T_3 = T_H \cdot T_0^2$	2	
	算出 $T_H = 400$ K	2	

第 2 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	寫出至第 m 級繞射的相鄰兩反射線的光程差 $\frac{1}{n} \times \sin \beta_m$	2	
	寫出形成 m 級建設性干涉的條件 $m\lambda = \frac{1}{n} \times \sin \beta_m$.	2	
	寫出答案： $\beta_m = \sin^{-1}(nm\lambda)$ 。	1	
(B) 3 分	寫出 $nm\lambda = \sin \beta_m \leq 1$	1	
	求出 $m \leq 100$	2	
(C) 6 分	寫出 λ' 為亮紋之條件： $\frac{1}{n} \times \sin \beta'_m = m\lambda'$	1	
	寫出 λ 為暗紋之條件： $\frac{1}{n} \times \sin \beta'_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$	3	
	求出解析度： $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Wnm$	2	
(D) 3 分	由 $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 998.3$ ，求出 $n = 999$ 。	3	
(E) 3 分	求出光柵方程式 $f(\alpha_i, \beta_i, n) = \frac{1}{n} \times \sin \alpha_i + \frac{1}{n} \times \sin \beta_m$	3	
(F) 5 分	寫出有效入射光的光程差： $\frac{1}{n}(\cos \phi \sin \alpha_i)$	1	
	寫出反射至第 m 級繞射的有效光程差： $\frac{1}{n}(\cos \phi \sin \beta_m)$	1	
	求出光柵方程式 $f(\alpha_i, \beta_i, n, \phi)$ $= \frac{1}{n} \left(\sqrt{\sin^2 \alpha_i - \sin^2 \phi} + \sqrt{\sin^2 \beta_m - \sin^2 \phi} \right)$	3	

第 3 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 8 分	求出 $\mathbf{v} = R_0 \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}$	1	
	求出磁力： $q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qB \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_s + qB \dot{z} \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi - qB \dot{\phi} \cos\phi \hat{\mathbf{z}}$	1	
	求出 $\mathbf{a} = R_0 \ddot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi - R_0 \dot{\phi}^2 \hat{\mathbf{e}}_s + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}}$.	1	
	說明不必考慮 s 分量	1	
	求出運動方程式 ϕ 分量： $mR_0 \ddot{\phi} = qB \dot{z} \cos\phi \Rightarrow R_0 \ddot{\phi} - \omega_c \dot{z} \cos\phi = 0$.	2	
	z 求出運動方程式分量： $m\ddot{z} = -qB \dot{\phi} \cos\phi \Rightarrow \ddot{z} + R_0 \omega_c \dot{\phi} \cos\phi = 0$.	2	
(B) 3 分	說明利用初始條件 $\phi(0) = 0$ 、 $\dot{z}(0) = R_0 \omega_z$ 及運動方程式 ϕ 分量(5)式	1	
	積分得出： $\dot{z} + R_0 \omega_c \sin\phi = R_0 \omega_z$	2	
(C) 5 分	寫出受磁力後之共振角頻率 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{k - \partial F_z / \partial z}{M}}$ 。	2	
	說明 $\dot{\phi} \times (4) + \dot{z} \times (5) = R_0^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} + \dot{z} \ddot{z} = 0$ ，對時間 t 積分，或利用力學能守恆得出： $R_0^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = R_0^2 \omega_\phi^2 + R_0^2 \omega_z^2$	2	
	說明利用 $\dot{z} + R_0 \omega_c \sin\phi = R_0 \omega_z$ 化簡上式	1	
	化簡求出 $\dot{\phi}^2 + \omega_c^2 \sin^2\phi - 2\omega_c \omega_z \sin\phi - \omega_\phi^2 = 0$.	2	
(D) 5 分	由 $\dot{\phi}^2 \geq 0$ 得出不等式： $\omega_c^2 \sin^2\phi - 2\omega_c \omega_z \sin\phi - \omega_\phi^2 \leq 0$.	1	
	解出不等式： $\frac{\omega_z - \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2}}{\omega_c} \leq \sin\phi \leq \frac{\omega_z + \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2}}{\omega_c}$	1	
	得出條件： $\frac{\omega_z - \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2}}{\omega_c} \leq -1$ 且 $\frac{\omega_z + \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2}}{\omega_c} \geq 1$	2	
	說明第一個條件比較強得到 $\omega_c \leq \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2} - \omega_z$	1	
(D) 4 分	利用 $\omega_z = 0$ ，將(9)式化簡為 $\omega_c^2 \sin^2\phi - \omega_\phi^2 \leq 0$ 。	1	
	解出不等式： $-\left \omega_\phi / \omega_c\right \leq \sin\phi \leq \left \omega_\phi / \omega_c\right $	1	
	得出條件： $\left \omega_\phi / \omega_c\right \leq 1$ 時， ϕ 被限制在區間 $[-\phi_0, \phi_0]$	1	
	說明運動軌跡是一條封閉曲線	1	

第 4 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	寫出圓球純滾動的條件： $\vec{V} + \vec{\omega} \times (-R\hat{z}) = 0$	2	
	得出 x 分量： $\omega_x = -\frac{V_y}{R}$	1	
	得出 y 分量： $\omega_y = \frac{V_x}{R}$	1	
(B) 8 分	說明光滑檯邊施給母球之衝量 $j_z = 0$ ，以致檯面施給球底部之衝量 $J_z = 0$ ，連帶使球底部的摩擦力衝量 $J_x = J_y = 0$ 。	2	
	說明衝量等於動量變化	1	
	得出 $V'_x = V_x + \frac{j_x}{m} = V_x$	1	
	得出 $V'_y = V_y + \frac{j_y}{m}$	1	
	說明繞質心之角衝量等於角動量變化	1	
	得出 $\omega'_x = \omega_x - \frac{j_y h}{I_c}$	1	
	得出 $\omega'_y = \omega_y + \frac{j_x h}{I_c} = \omega_y$	1	
(C) 8 分	說明光滑檯邊施給母球之衝量 $j_x = 0$ 。因此母球與檯邊的碰撞為彈性碰撞，即碰撞前後的總動能 E 相等	1	
	寫出能量守恆式如 $\frac{2E}{m} = \left[(V_x)^2 + \left(V_y + \frac{j_y}{m} \right)^2 \right] + k^2 \left[\left(\omega_x - \frac{j_y h}{I_c} \right)^2 + (\omega_y)^2 \right]$ $= \left[(V_x)^2 + (V_y)^2 \right] + k^2 \left[(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 \right]$	2	
	化簡得到 $\left[\frac{j_y}{m} \left(2V_y + \frac{j_y}{m} \right) \right] + k^2 \left[\frac{j_y h}{I_c} \left(-2\omega_x + \frac{j_y h}{I_c} \right) \right]$	1	
	說明利用(1)式 $\omega_x = -V_y/R$ ，並將(1)式帶入能量守恆式化簡	2	
	得出 $j_y = -2mV_y \frac{1+\frac{h}{R}}{1+\frac{h^2}{k^2}}$	2	

(D) 5 分	利用(2)、(3)兩式，得出 $\tan \phi = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y + \frac{hy}{m}}{v_x}$	2	
	說明利用(9)式之結果	1	
	將(9)式之結果代入上式，化簡得出 $\tan \phi = \frac{v_x}{v_y} \left[\frac{1 + \frac{h^2}{k^2}}{1 + \frac{h}{R} \left(2 - \frac{Rh}{k^2} \right)} \right].$	2	

第 5 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A)(i) 3 分	列出 $V = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}d = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\frac{d}{8} + \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\frac{3d}{8}$ ，並得出 $\sigma_1 = 2\sigma_2$	2	
	得出 $C = \frac{7\pi a^2 \epsilon_0}{4d}$	1	
(A)(ii) 2 分	列出 $\frac{q}{C} + Ri = 0$ 。	1	
	得出故 $q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$	1	
(A)(iii) 4 分	$\sigma_1(t) = \frac{8Q_0}{7\pi a^2} e^{-t/RC}$ ， $\sigma_2(t) = \frac{4Q_0}{7\pi a^2} e^{-t/RC}$	1	
	說明半徑在 r 與 a 間圓環之電荷增加率 = 流入此區間的電流 = $2\pi r j$	1	
	得出 $a/2 < r < a$ ， $j = -(1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{4Q_0}{7\pi r RC} e^{-t/RC}$	1	
	得出 $0 < r < \frac{a}{2}$ ， $j = -(1 - \frac{4r^2}{a^2}) \frac{Q_0}{2\pi r RC} e^{-t/RC}$	1	
(A)(iv) 6 分	得出 $0 < r < \frac{a}{2}$ ， $\vec{B} = -\frac{2\mu_0 r}{7\pi a^2} \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \hat{\phi}$	2	
	得出 $\frac{a}{2} < r < a$ ， $\vec{B} = -\frac{\mu_0(8r^2 - a^2)}{14\pi r a^2} \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \hat{\phi}$	2	
	求出總流出電磁能為 $\frac{2dQ_0^2}{7\pi\epsilon_0 a^2}$	2	
(B)(i) 7 分	列出 $\frac{q_1}{C} - \frac{L}{2} \frac{di}{dt} - \frac{q_2}{C} - \frac{L}{2} \frac{di}{dt} = 0$	2	
	列出 $\frac{dq_1}{dt} = -i = -\frac{dq_2}{dt}$	1	
	積分得出 $q_2(t) = \frac{Q_0}{2}(1 - \cos \omega t)$ ， $q_1(t) = \frac{Q_0}{2}(1 + \cos \omega t)$ 。	2	
	求出轉移到右電容器所需之最小時間 $\frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\pi b}{2d}}$ 。	2	
(B)(ii) 3 分	求出感應電場 $\vec{E} = -\frac{\mu_0 Q_0}{2bLC\omega} \cos \omega t r \hat{\phi}$	1	
	求出磁場 $\vec{B} = -\frac{\mu_0 Q_0}{bLC\omega} \sin \omega t \hat{z}$	1	
	求出流入圓柱中空腔之電磁能最大值 $\frac{(dc^2 \mu_0 Q_0)^2}{2\pi \omega^2 a^2 b^3}$	1	

第 6 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	寫出系統能量 $E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$	2	
	由 $E \geq 0$ 得出 $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ 或 $k \leq 1$	3	
(B) 7 分	寫出主迴路 Kirchoff 電壓定律 $V_1 = I_1 Z_1 - M \frac{dI_2}{dt} = I_1 Z_1 - j\omega M I_2$	2	
	寫出次主迴路 Kirchoff 電壓定律 $I_2 Z_2 - M \frac{dI_1}{dt} = I_2 Z_2 - j\omega M I_1 = 0$	2	
	得出 $I_2 = \frac{j\omega M}{Z_2} I_1 = \frac{j\omega M}{R_L + R_2} I_1$	1	
	求出負載功率 $P_L = \frac{\omega^2 M^2 R_L}{(R_L + R_2)^2} I_1^2$	2	
(C) 5 分	寫出 $P_{in} = I_1^2 \left[(R_1 + R_s) + \frac{\omega^2 M^2}{R_L + R_2} \right]$	2	
	得出 $\eta = \frac{\omega^2 M^2 R_L}{\omega^2 M^2 (R_L + R_2) + (R_s + R_1)(R_L + R_2)^2}$	3	
(D) 8 分	列出極值條件 $\omega^2 M^2 R_2 + (R_s + R_1)(R_L + R_2)^2 - 2R_L(R_s + R_1)(R_L + R_2) = 0$	2	
	引入 $\beta = R_L / R_2$ ，化簡上式得出 $(\beta + 1)^2 - 2(\beta + 1) - 1/\alpha = 0$	2	
	求出 $\beta = \sqrt{1 + 1/\alpha}$	2	
	求出 η 的極值 $\eta_{max} = (1 + 2\alpha) - 2\sqrt{\alpha(1 + \alpha)} / (8r)$	2	

2018 年第 19 屆亞洲物理及第 49 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試參考解答

第 1 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 8 分	寫出熱力學第一定律 $dQ = dU - pdV$	1	
	寫出理想氣體方程式 $pV = nRT$	1	
	結合熱力學第一定律及想氣體方程式寫出等溫過程中 $\Delta S = \int \frac{C_V}{T} dT + \int \frac{nR}{V} dV$	2	
	算出 $\Delta S_{a \rightarrow b} = nR \ln(V_b/V_a)$	1	
	算出 $\Delta S_{c \rightarrow d} = nR \ln(V_d/V_c)$	1	
	算出 $\Delta S_{b \rightarrow c} = 0$	1	
	算出 $\Delta S_{d \rightarrow a} = 0$	1	
(B) 9 分	寫出卡諾熱機可逆過程之條件: $dS_1 + dS_2 = \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$	2	
	由熱容量定義及能量守恆: $dQ = CdT \rightarrow \frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2}$	2	
	積分得出 $T_1 T_2 = \text{constant}$	2	
	求出最終溫度: $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$	1	
	求出熱機所能作的最大功 $W = C[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}]$	2	
(C) 8 分	得出 T_L 最低溫為 100 K	2	
	將(B)的結果推廣到 3 個物質: $T_1 T_2 T_3 = \text{constant}$	1	
	由能量守恆得出: $T_1 + T_2 + T_3$ 亦為一常數	1	
	得出 $T_1 + T_2 + T_3 = T_H + 2T_0$; $T_1 T_2 T_3 = T_H \cdot T_0^2$	2	
	算出 $T_H = 400$ K	2	

第 2 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	寫出至第 m 級繞射的相鄰兩反射線的光程差 $\frac{1}{n} \times \sin \beta_m$	2	
	寫出形成 m 級建設性干涉的條件 $m\lambda = \frac{1}{n} \times \sin \beta_m$.	2	
	寫出答案： $\beta_m = \sin^{-1}(nm\lambda)$ 。	1	
(B) 3 分	寫出 $nm\lambda = \sin \beta_m \leq 1$	1	
	求出 $m \leq 100$	2	
(C) 6 分	寫出 λ' 為亮紋之條件： $\frac{1}{n} \times \sin \beta'_m = m\lambda'$	1	
	寫出 λ 為暗紋之條件： $\frac{1}{n} \times \sin \beta'_m = \left(m + \frac{1}{Wn}\right) \lambda$	3	
	求出解析度： $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Wnm$	2	
(D) 3 分	由 $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 998.3$ ，求出 $n = 999$ 。	3	
(E) 3 分	求出光柵方程式 $f(\alpha_i, \beta_i, n) = \frac{1}{n} \times \sin \alpha_i + \frac{1}{n} \times \sin \beta_m$	3	
(F) 5 分	寫出有效入射光的光程差： $\frac{1}{n}(\cos \phi \sin \alpha_i)$	1	
	寫出反射至第 m 級繞射的有效光程差： $\frac{1}{n}(\cos \phi \sin \beta_m)$	1	
	求出光柵方程式 $f(\alpha_i, \beta_i, n, \phi)$ $= \frac{1}{n} \left(\sqrt{\sin^2 \alpha_i - \sin^2 \phi} + \sqrt{\sin^2 \beta_m - \sin^2 \phi} \right)$	3	

第 3 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 8 分	求出 $\mathbf{v} = R_0 \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}$	1	
	求出磁力： $q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qB \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_s + qB \dot{z} \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi - qB \dot{\phi} \cos\phi \hat{\mathbf{z}}$	1	
	求出 $\mathbf{a} = R_0 \ddot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi - R_0 \dot{\phi}^2 \hat{\mathbf{e}}_s + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}}$.	1	
	說明不必考慮 s 分量	1	
	求出運動方程式 ϕ 分量： $mR_0 \ddot{\phi} = qB \dot{z} \cos\phi \Rightarrow R_0 \ddot{\phi} - \omega_c \dot{z} \cos\phi = 0$.	2	
	z 求出運動方程式分量： $m\ddot{z} = -qB \dot{\phi} \cos\phi \Rightarrow \ddot{z} + R_0 \omega_c \dot{\phi} \cos\phi = 0$.	2	
(B) 3 分	說明利用初始條件 $\phi(0) = 0$ 、 $\dot{z}(0) = R_0 \omega_z$ 及運動方程式 ϕ 分量(5)式	1	
	積分得出： $\dot{z} + R_0 \omega_c \sin\phi = R_0 \omega_z$	2	
(C) 5 分	寫出受磁力後之共振角頻率 $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{k - \partial F_z / \partial z}{M}}$ 。	2	
	說明 $\dot{\phi} \times (4) + \dot{z} \times (5) = R_0^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} + \dot{z} \ddot{z} = 0$ ，對時間 t 積分，或利用力學能守恆得出： $R_0^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = R_0^2 \omega_\phi^2 + R_0^2 \omega_z^2$	2	
	說明利用 $\dot{z} + R_0 \omega_c \sin\phi = R_0 \omega_z$ 化簡上式	1	
	化簡求出 $\dot{\phi}^2 + \omega_c^2 \sin^2\phi - 2\omega_c \omega_z \sin\phi - \omega_\phi^2 = 0$.	2	
(D) 5 分	由 $\dot{\phi}^2 \geq 0$ 得出不等式： $\omega_c^2 \sin^2\phi - 2\omega_c \omega_z \sin\phi - \omega_\phi^2 \leq 0$.	1	
	解出不等式： $\frac{\omega_z - \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2}}{\omega_c} \leq \sin\phi \leq \frac{\omega_z + \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2}}{\omega_c}$	1	
	得出條件： $\frac{\omega_z - \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2}}{\omega_c} \leq -1$ 且 $\frac{\omega_z + \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2}}{\omega_c} \geq 1$	2	
	說明第一個條件比較強得到 $\omega_c \leq \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\phi^2} - \omega_z$	1	
(D) 4 分	利用 $\omega_z = 0$ ，將(9)式化簡為 $\omega_c^2 \sin^2\phi - \omega_\phi^2 \leq 0$ 。	1	
	解出不等式： $-\left \omega_\phi / \omega_c\right \leq \sin\phi \leq \left \omega_\phi / \omega_c\right $	1	
	得出條件： $\left \omega_\phi / \omega_c\right \leq 1$ 時， ϕ 被限制在區間 $[-\phi_0, \phi_0]$	1	
	說明運動軌跡是一條封閉曲線	1	

第 4 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	寫出圓球純滾動的條件： $\vec{V} + \vec{\omega} \times (-R\hat{z}) = 0$	2	
	得出 x 分量： $\omega_x = -\frac{V_y}{R}$	1	
	得出 y 分量： $\omega_y = \frac{V_x}{R}$	1	
(B) 8 分	說明光滑檯邊施給母球之衝量 $j_z = 0$ ，以致檯面施給球底部之衝量 $J_z = 0$ ，連帶使球底部的摩擦力衝量 $J_x = J_y = 0$ 。	2	
	說明衝量等於動量變化	1	
	得出 $V'_x = V_x + \frac{j_x}{m} = V_x$	1	
	得出 $V'_y = V_y + \frac{j_y}{m}$	1	
	說明繞質心之角衝量等於角動量變化	1	
	得出 $\omega'_x = \omega_x - \frac{j_y h}{I_c}$	1	
	得出 $\omega'_y = \omega_y + \frac{j_x h}{I_c} = \omega_y$	1	
(C) 8 分	說明光滑檯邊施給母球之衝量 $j_x = 0$ 。因此母球與檯邊的碰撞為彈性碰撞，即碰撞前後的總動能 E 相等	1	
	寫出能量守恆式如 $\frac{2E}{m} = \left[(V_x)^2 + \left(V_y + \frac{j_y}{m} \right)^2 \right] + k^2 \left[\left(\omega_x - \frac{j_y h}{I_c} \right)^2 + (\omega_y)^2 \right]$ $= \left[(V_x)^2 + (V_y)^2 \right] + k^2 \left[(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 \right]$	2	
	化簡得到 $\left[\frac{j_y}{m} \left(2V_y + \frac{j_y}{m} \right) \right] + k^2 \left[\frac{j_y h}{I_c} \left(-2\omega_x + \frac{j_y h}{I_c} \right) \right]$	1	
	說明利用(1)式 $\omega_x = -V_y/R$ ，並將(1)式帶入能量守恆式化簡	2	
	得出 $j_y = -2mV_y \frac{1+\frac{h}{R}}{1+\frac{h^2}{k^2}}$	2	

(D) 5 分	利用(2)、(3)兩式，得出 $\tan \phi = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y + \frac{hy}{m}}{v_x}$	2	
	說明利用(9)式之結果	1	
	將(9)式之結果代入上式，化簡得出 $\tan \phi = \frac{v_x}{v_y} \left[\frac{1 + \frac{h^2}{k^2}}{1 + \frac{h}{R} \left(2 - \frac{Rh}{k^2} \right)} \right].$	2	

第 5 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A)(i) 3 分	列出 $V = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}d = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\frac{d}{8} + \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\frac{3d}{8}$ ，並得出 $\sigma_1 = 2\sigma_2$	2	
	得出 $C = \frac{7\pi a^2 \epsilon_0}{4d}$	1	
(A)(ii) 2 分	列出 $\frac{q}{C} + Ri = 0$ 。	1	
	得出故 $q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$	1	
(A)(iii) 4 分	$\sigma_1(t) = \frac{8Q_0}{7\pi a^2} e^{-t/RC}$ ， $\sigma_2(t) = \frac{4Q_0}{7\pi a^2} e^{-t/RC}$	1	
	說明半徑在 r 與 a 間圓環之電荷增加率 = 流入此區間的電流 = $2\pi r j$	1	
	得出 $a/2 < r < a$ ， $j = -(1 - \frac{r^2}{a^2}) \frac{4Q_0}{7\pi r RC} e^{-t/RC}$	1	
	得出 $0 < r < \frac{a}{2}$ ， $j = -(1 - \frac{4r^2}{a^2}) \frac{Q_0}{2\pi r RC} e^{-t/RC}$	1	
(A)(iv) 6 分	得出 $0 < r < \frac{a}{2}$ ， $\vec{B} = -\frac{2\mu_0 r}{7\pi a^2} \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \hat{\phi}$	2	
	得出 $\frac{a}{2} < r < a$ ， $\vec{B} = -\frac{\mu_0(8r^2 - a^2)}{14\pi r a^2} \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \hat{\phi}$	2	
	求出總流出電磁能為 $\frac{2dQ_0^2}{7\pi\epsilon_0 a^2}$	2	
(B)(i) 7 分	列出 $\frac{q_1}{C} - \frac{L}{2} \frac{di}{dt} - \frac{q_2}{C} - \frac{L}{2} \frac{di}{dt} = 0$	2	
	列出 $\frac{dq_1}{dt} = -i = -\frac{dq_2}{dt}$	1	
	積分得出 $q_2(t) = \frac{Q_0}{2}(1 - \cos \omega t)$ ， $q_1(t) = \frac{Q_0}{2}(1 + \cos \omega t)$ 。	2	
	求出轉移到右電容器所需之最小時間 $\frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\pi b}{2d}}$ 。	2	
(B)(ii) 3 分	求出感應電場 $\vec{E} = -\frac{\mu_0 Q_0}{2bLC\omega} \cos \omega t r \hat{\phi}$	1	
	求出磁場 $\vec{B} = -\frac{\mu_0 Q_0}{bLC\omega} \sin \omega t \hat{z}$	1	
	求出流入圓柱中空腔之電磁能最大值 $\frac{(dc^2 \mu_0 Q_0)^2}{2\pi \omega^2 a^2 b^3}$	1	

第 6 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	寫出系統能量 $E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$	2	
	由 $E \geq 0$ 得出 $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ 或 $k \leq 1$	3	
(B) 7 分	寫出主迴路 Kirchoff 電壓定律 $V_1 = I_1 Z_1 - M \frac{dI_2}{dt} = I_1 Z_1 - j\omega M I_2$	2	
	寫出次主迴路 Kirchoff 電壓定律 $I_2 Z_2 - M \frac{dI_1}{dt} = I_2 Z_2 - j\omega M I_1 = 0$	2	
	得出 $I_2 = \frac{j\omega M}{Z_2} I_1 = \frac{j\omega M}{R_L + R_2} I_1$	1	
	求出負載功率 $P_L = \frac{\omega^2 M^2 R_L}{(R_L + R_2)^2} I_1^2$	2	
(C) 5 分	寫出 $P_{in} = I_1^2 \left[(R_1 + R_s) + \frac{\omega^2 M^2}{R_L + R_2} \right]$	2	
	得出 $\eta = \frac{\omega^2 M^2 R_L}{\omega^2 M^2 (R_L + R_2) + (R_s + R_1)(R_L + R_2)^2}$	3	
(D) 8 分	列出極值條件 $\omega^2 M^2 R_2 + (R_s + R_1)(R_L + R_2)^2 - 2R_L(R_s + R_1)(R_L + R_2) = 0$	2	
	引入 $\beta = R_L / R_2$ ，化簡上式得出 $(\beta + 1)^2 - 2(\beta + 1) - 1/\alpha = 0$	2	
	求出 $\beta = \sqrt{1 + 1/\alpha}$	2	
	求出 η 的極值 $\eta_{max} = (1 + 2\alpha) - 2\sqrt{\alpha(1 + \alpha)} / (8r)$	2	