

2019年第20屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第50屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2019年2月16日

13:30~16:30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 三、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t 為時間， x 為任意物理量)

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$, $f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$;

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} , \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} .$$

2. $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}$, $m \neq -1$; $\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$;

$$\frac{d}{dx} (ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1} ; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1} .$$

3. $\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$, $\frac{d \sin ax}{dx} = a \cos ax$, $\frac{d \cos ax}{dx} = -a \sin ax$;

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} , \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax , \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax .$$

4. 當 $|x| \ll 1$, $(1+x)^\alpha \approx 1+ax$,

$$e^x \approx 1+x , \quad \sin x \approx x , \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} .$$

5. 線性且係數為常數的一階微分方程式 $ax'(t) + bx(t) = 0$, 一般解形式為

$$x(t) = \alpha e^{st}$$

其中 s 是右列一次方程式 $as+b=0$ 的根 ,

而 α 是由初始條件 $x(0)$ 決定的積分常數。

6. 線性且係數為常數的二階微分方程式 $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$, 一般解形式為

$$x(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t}$$

其中 s_1, s_2 是右列二次方程式 $as^2 + bs + c = 0$ 的根 ,

而 α_1, α_2 是由初始條件 $x(0)$ 和 $x'(0)$ 決定的積分常數。

2019年第20屆亞洲物理及第50屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、熱機

一個由兩個等壓過程和兩個定容(等體積)過程所組成的熱機循環，此熱機是以 1.00 莫耳的雙原子分子理想氣體進行工作，在如圖 1 所示 P - V 圖中的 ABCD 四點間進行循環。

已知理想氣體常數 $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ，

A 點的壓力及溫度分別為 $P_0 = 1.00 \text{ atm}$ 、 $T_0 = 200 \text{ K}$ ，

而 $P_h = 3.00 P_0$ ， $V_h = 2.00 V_0$ 。在不考慮能量損失的情況下，回答下列問題。

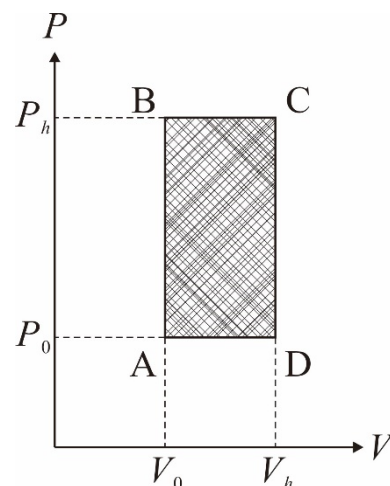


圖 1

- (A) 計算此熱機的效率。
- (B) 熱機完成一次循環過程所釋放的熱，恰好能使質量為 m 的乾冰在一大氣壓的環境下，自 -100°C 轉變成溫度為 27.0°C 的二氧化碳氣體，問 m 的數值為何？已知在一大氣壓下，乾冰的密度是 1.50 g/cm^3 、相變溫度是 -78.0°C ，比熱是 $55.0 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 、汽化熱是 290 J/g ，而二氧化碳的比熱則是 $37.0 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 。
- (C) 承(B)，此二氧化碳氣體的體積(V_g)和乾冰的體積(V_{di})的比值 V_g/V_{di} 為何？(將二氧化碳視為理想氣體)

今因工作需求而要改裝此熱機，試問

- (D) V_h 要調整為多大，方能使 B 和 D 落在一條等溫線上？
- (E) V_h 要調整為多大，方能使 B 和 D 落在一條絕熱線上？
- (F) 若 B 與 D 落在一條絕熱線上，將此時 D 點應有的體積稱為 V_{ad} 。在實務上當 V_{ad}

和 V_h 的差異 $\left(\frac{|V_h - V_{ad}|}{V_h} \right) \leq 5\%$ ，我們就可以把 V_h 視為 V_{ad} ，而不須調整 V_h 的大小。那

麼前一小題所對應到的情況是否能符合此實務條件？若將此熱機的工作氣體更換為單原子理想氣體，是否能夠符合此實務條件？

二、脈衝雷射

特定波長的光會在雷射腔體中產生駐波，腔體如圖 2 之示意圖所示，其長度為 L 。腔體中央有一長度為 d 的增益介質(另有一系統提供此介質能量讓光強度增強，因為與題目無關故不列出)，當光經過此增益介質時，光的強度會略微增加，因而輸出雷射光。腔體兩端有兩個平行的反射鏡(忽略其厚度)，類似一個法布立-培若共振腔，可以百分之百反射雷射光。

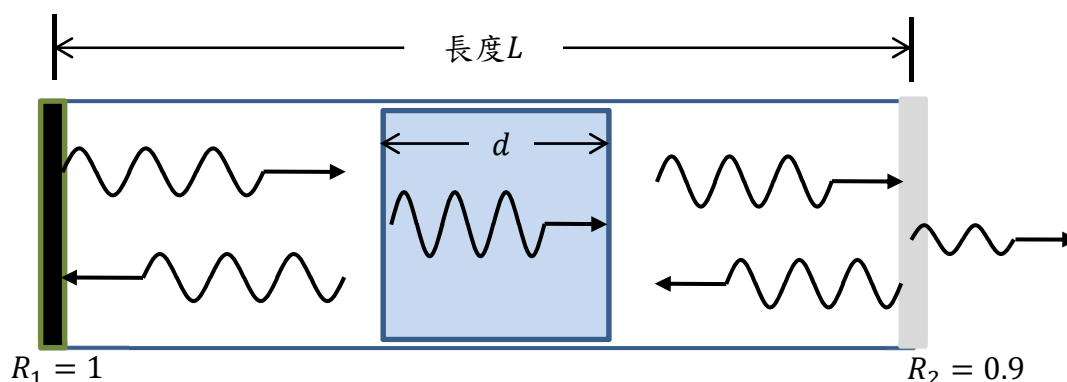


圖 2：雷射共振腔示意圖

- (A) 已知增益介質的折射率為 n ，則可以在共振腔中傳播之光波頻率 ν 可以寫為
 $\nu = m \times \nu_0$ ，其中 m 為正整數，求 ν_0 的表示式。

已知在共振腔中的光為平面波，且當光經過增益介質時，會產生增強作用。為簡化計算過程，假設增益介質的總增益效果(已扣除相關損失後)如圖 3 所示，增益介質在方格範圍內發光強度都相同，亦即增益介質可以發出 $f_0 - \Delta f/2$ 到 $f_0 + \Delta f/2$ 的光，且增益效果都相同。已知 $f_0 = 2 \times 10^{15} \text{ Hz}$ ，而頻寬 Δf 為 $5 \times 10^{12} \text{ Hz}$ 。

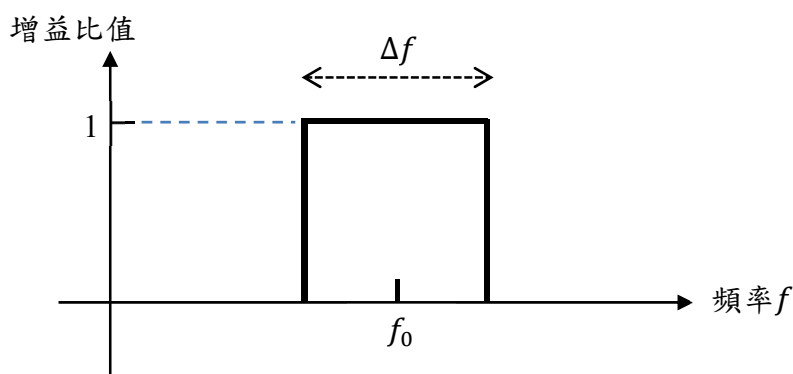


圖 3

- (B) 若增益介質的折射率 $n = 1.5$ ，長度 d 為 50 cm ；而雷射共振腔的長度為

$L = 100\text{cm}$ ，則可以在此共振腔內存在的共振模之數目為何？

(C) 設每個共振模的強度為 I_0 ，則當共振腔中的共振模都產生建設性干涉時會造成脈衝光，也就是如閃光燈一般，只是雷射脈衝光是在很短時間光強度十分強，此現象稱之為”模鎖定”(Mode-Locking)，此時光強度 $I_t(t)$ 隨時間的變化為何？

(D) 由(C)的結果，求模鎖定时相鄰兩個脈衝光的時間差為何？

(E) 由(C)的結果，求模鎖定时此脈衝光的時域寬度，也就是此脈衝光在時間軸上的寬度。

三、電子在氣體中的游離效應

一個電荷為 $-e$ 的電子，在處於強電場下的氣體中會被加速，其動能因而可大到足以使被它撞擊的氣體分子A游離，以致分解成為一個正離子 A^+ 與一個電子 e^- 。本題所考慮之電子的游離效應，將只限於上述 $A \rightarrow A^+ + e^-$ 的類型，並假設電子與離子的復合可忽略。以下利用簡單的模型，以探討系統達到穩定態時，電子在氣體中的游離效應，這在充氣電離輻射偵測器中是一個相當基本而重要的課題。

如下圖所示，假設兩片平行板電極相距為 d ，平行板之間的強電場是均勻且為定值，而空間充滿由中性分子組成的氣體，氣體溫度固定為 T 。電位較低的負極板位於 $x = 0$ ，正極板則位於 $x = d$ 。當每個電子在氣體中行進時，每單位長度產生的游離電子數以常數 α 代表，此常數稱為第一 Townsend 係數。

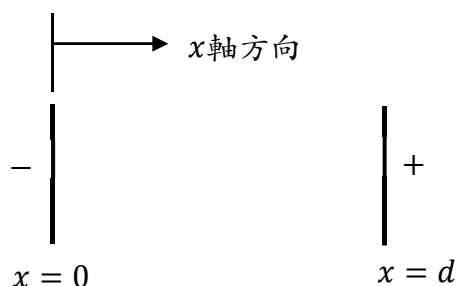


圖 4

- (A) 以紫外線均勻照射負極板(位於 $x = 0$)，使其沿 x 軸方向每單位時間發射的自由電子數為 n_0 ，這些電子在氣體中沿 x 軸方向往正極板前進，而與氣體分子發生游離碰撞。假設電場不受電子與離子的影響，並忽略離子的游離效應，電子的第一 Townsend 係數為 α ，試求每單位時間到達正極板(位於 $x = d$)的電子總數 n_d 。
- (B) 承上題。由於實驗發現當 αd 的值較大時，每單位時間到達正極板的電子總數，高於上題預測的值，因此有人認為電子與分子發生游離碰撞所產生之正離子(數目等於游離的電子數)會往負極移動，被電場加速後，亦能使氣體分子游離而產生電子。假設以常數 β 代表每個正離子前進時每單位長度產生的游離電子數，並將前小題(A)的模型推廣，以包括電子與正離子的游離效應，則每單位時間到達正極板的電子總數 N_d 為何？
- (C) 今考慮產生初級電子的另一種不同方式：假設兩電極板間的氣體，其各部分均勻受到外部輻射源的照射，以致氣體分子被游離，在每單位時間內，每單位體積產生的初級電子(與離子)數目為 ν 。假設各電子的第一 Townsend 係數仍為 α ，且只考慮電子(而不考慮離子)的游離作用(此處所指的電子包括來自上述氣體各部分的初級電子，以及它們與分子碰撞所產生的次級與後續更為次級的游離電子)，則流經兩極板間氣體的電流密度 J 為何？

四、細鐵條的運動

如圖 5 所示，有一支均勻細鐵條直立於水平地面上，細鐵條長度為 $2L$ ，質量 M ，鐵條相對於其質心的轉動慣量 $I = ML^2/3$ 。如果在頂端施以極微小的水平力量，使得細鐵條失去平衡，持續向下傾倒，如圖 6 所示。

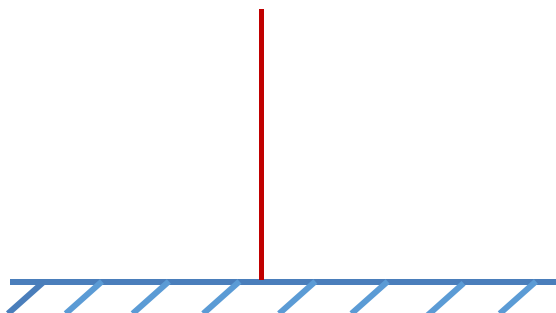


圖 5

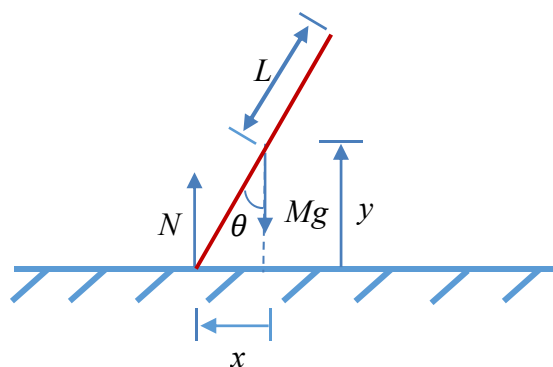


圖 6

若鐵條與地面之間無摩擦力，試回答下列問題：

- (A) 細鐵條在傾斜過程中之角速度 $\dot{\theta}$ 與角度 θ 的關係式，並求落地前瞬間的角速度。
- (B) 細鐵條之質心在垂直方向之速度 $\dot{y}$ 與角度 θ 關係式，並求落地前瞬間的垂直速度。
- (C) 細鐵條下端之水平速度 $\dot{x}$ 與角度 θ 關係式，並大略畫出細鐵條的底端速度 $\dot{x}$ 與角度 θ 的關係圖。
- (D) 細鐵條底端受到的正向力 N 與角度 θ 關係式，並求落地前瞬間的正向力。

若鐵條與地面之間的靜摩擦力係數為 μ ，而其它條件維持不變，試回答下列問題：

- (E) 當 $\theta = \theta_0$ 時，細鐵條下端會開始滑動，求 θ_0 所滿足的方程式。
- (F) 承(E)小題，若 $\mu \ll 1$ ，求 θ_0 。

五、帶電質點在靜電場中的運動

如圖 7 所示，有一固定於 z 軸上、帶均勻電荷之細棒，長度為 $2a$ ，總電荷為 $Q(>0)$ 。帶電細棒附近有一質點，其質量為 m 、電荷為 $-q(<0)$ 。質點受帶電細棒的靜電力作用而運動。

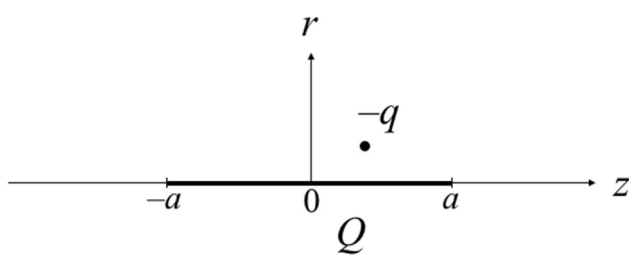


圖 7

(A) 證明此點電荷的角動量的 z 分量守恆。

(B) 若點電荷在 $z = 0$ 的平面上繞著帶電細棒作半徑為 r_0 的圓周運動。試求此圓周運動的角頻率 ω_0 。

(C) 承 (B) 小題，若此質點的圓周運動在徑向上受到一微擾，則此質點在 r 方向的位置會變成 $r = r_0(1 + \epsilon \sin \omega t)$ 。試求 ω 與 ω_0 的關係。

(D) 承 (C) 小題，受到上述微擾，此質點的角速度會變成 $\dot{\theta} = \omega_0(1 - \epsilon \alpha_0 \sin \omega t)$ ，試求 α_0 。

提示： $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}} dx = \ln(|\sqrt{x^2+b^2}+x|) + C$ ，

$$\int \frac{1}{(x^2+b^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}} + C。$$

六、石英振盪器

石英震盪器和濾波器。壓電石英晶體在電子電路的主要應用之一，為控制振盪器與濾波器的頻率。如圖 8(a)所示，在一經適當切割的石英晶體薄板兩面鍍上金屬電極，並將其接上一個交流電源，此時因壓電效應可使晶體內產生一力學波。設此力學波波長為 λ ，而該晶體沿著波行進方向的長度為 ℓ ，當兩者滿足共振條件： $n(\lambda/2) = \ell$ （其中 n 為正整數）時，該力學波即可在晶體內形成一駐波，其頻率 $f_s = v/\lambda$ ， v 為該力學波在介質中的傳播速度。由於交流電經由壓電效應激發石英的力學振動，其行為類似於由交流電源驅動的串聯電感-電容-電阻(LCR)電路，如圖 8(b)右側的等效電路所示。在此等效 LCR 電路中， L 、 C 和 R 分別對應到石英晶體的質量、剛性、和力學損耗（或阻尼）。此外，由於石英片的兩面均鍍有金屬電極，故可將之視為一個平行板電容 C_0 ， C_0 與前述的等效 LCR 電路並聯，如圖 8(b)左側的等效電路所示。典型石英振盪器的阻抗除了在力學振動的共振頻率 f_s 處有一最小值外，另因等效電感 L 與二等效電容(C 和 C_0)間的共振，石英振盪器在另一頻率 f_a 處（稱為反共振頻率，anti-resonant frequency），會出現一阻抗極大值，如圖 8(c) 所示。根據以上所述，試回答下列問題。

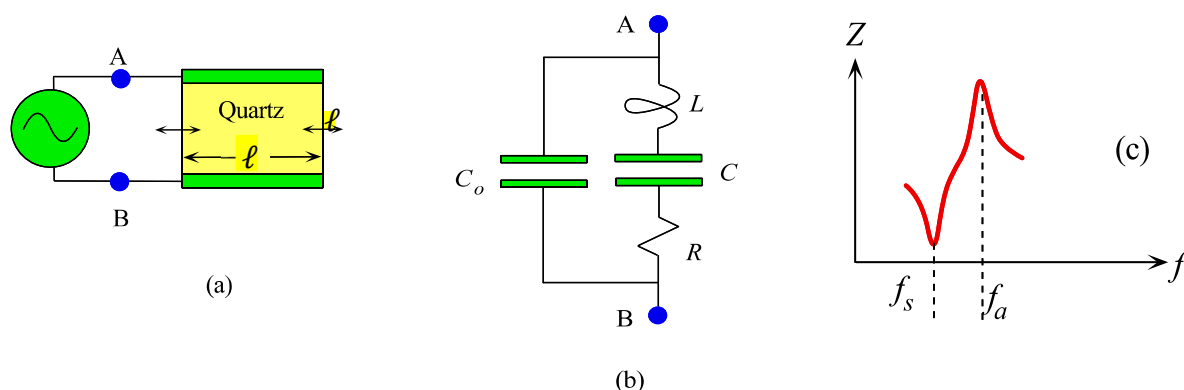


圖 8

- (A) 試從上述石英振盪器特性，計算 f_s 和 f_a ，以圖中的參數 L 、 C 、 C_0 等表示。
- (B) 已知石英的楊氏模數 $Y = 80.0 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 2.65 \text{ g/cm}^3$ 。試問適合用於 1.00 MHz 的石英震盪器之長度大約為何？（假設該駐波為 $n = 1$ 的基頻駐波。）
- (C) 壓電材料的耦合係數(coupling coefficient) κ 可定義為：

$$\kappa^2 \equiv \frac{\text{系統儲存的力學能}}{\text{系統儲存的全部能量}}, \text{ 試證明: } \kappa^2 = 1 - \frac{f_s^2}{f_a^2}.$$

- (D) 一典型 X-cut 石英晶體， $\kappa = 0.100$ 。若已知 $f_s = 1.00 \text{ MHz}$ ， $C_0 = 5.00 \text{ pF}$ ， $R = 20.0 \Omega$ ，試求該石英晶體的等效電感 L 及電容 C 。
- (E) 承(D)，已知石英振盪器的品質因子(quality factor) Q 可表示為：

$$Q = \frac{1}{2\pi f_s RC}, \text{ 試計算該石英振盪器的品質因子。}$$

2019年第20屆亞洲物理及第50屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試參考解答

第 1 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 6 分	算出熱機對外作的功 $W = 2 P_0 V_0$	2	
	算出熱機吸熱 $Q_{\text{in}} = (31/2)P_0 V_0$	2	
	算出熱機的效率 $e = W/Q_{\text{in}} = 4/31 = 0.129$	2	
(B) 4 分	算出熱機的總放熱 $Q_{\text{out}} = (27/2)nRT_0 = 22400 \text{ (J)}$	2	
	求得乾冰的質量為 $m = 55.3 \text{ (g)}$	2	
(C) 5 分	算出乾冰體積 $V_{\text{di}} = 3.69 \times 10^{-5} \text{ (m}^3\text{)}$	2	
	算出 27.0°C 二氧化碳的體積 $V_g = 3.10 \times 10^{-2} \text{ (m}^3\text{)}$ 。	2	
	算出二氧化碳與乾冰體積的比值 $V_g/V_{\text{di}} = 840$ 。	1	
(D) 3 分	B、D 在一條等溫線上，算出 $V_h = 3V_0$	3	
(E) 3 分	B、D 在一條絕熱線上，列出 $P_B V_B^\gamma = P_D V_h^\gamma$ ， 算出 $V_h = 3^{1/\gamma} V_0 = (2.19)V_0$	3	
(F) 4 分	$V_{\text{ad}} = 2.192 V_0$ ， $V_h = 2 V_0$ ，其差異超過 5%，所以其體積必須調整	1	
	若工作氣體為單原子理想氣體，則 $\gamma = 5/3$ ，故 $V_{\text{ad}} = (1.93)V_0$ 。	2	
	V_{ad} 和 V_h 的差異是 3.35%，不需調整 V_h 。	1	

第 2 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 7 分	列出光程: $(L - d + nd)$	2	
	寫出共振條件: $2(L - d + nd) = m\lambda$ 。	3	
	寫出答案: $\nu_0 = \frac{c}{2[L+(n-1)d]}$ 。	2	
(B) 3 分	算出 $\nu_0 = 1.2 \times 10^8 \text{Hz}$	1	
	求出共振模的數目: $M_0 = \Delta f / \nu_0 = 41666$ 。 或 $M_0 = 2\Delta f / \nu_0 = 83333$	2	
(C) 8 分	列出干涉振幅 $A_t \propto \sum_{m=1}^{M_0} e^{-i\nu_0 m t} = \frac{e^{-i\nu_0 t}(1 - e^{-i\nu_0 M_0 t})}{1 - e^{-i\nu_0 t}}$ 。	4	
	算出 $I_t(t) = A_t ^2 = I_0 \left(\frac{\sin 5\pi \times 10^{12} t}{\sin 1.2\pi \times 10^8 t} \right)^2$ 。 或 $I_t(t) = A_t ^2 = I_0 \left(\frac{\sin 5\pi \times 10^{12} t}{\sin 2.4\pi \times 10^8 t} \right)^2$ 。	4	
(D) 3 分	兩相鄰脈衝的時間間距: $1.2\pi \times 10^8 T_0 = \pi$ 。 或 $2.4\pi \times 10^8 T_0 = \pi$ 。 $T_0 = \frac{1}{1.2 \times 10^8} = 8.33 \times 10^{-9}$ 。 或 $T_0 = \frac{1}{2.4 \times 10^8} = 4.16 \times 10^{-9} \text{秒}$ 。	3	
(E) 4 分	脈衝時域的寬度為 $5\pi \times 10^{12} t_0 = \pi$ 。 $t_0 = \frac{1}{5 \times 10^{12}} = 2 \times 10^{-13} \text{秒}$ 。	4	

第 3 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	列出 $dn = \alpha n(x)dx$	1	
	積分得出 $n(x) = n(0)e^{\alpha x} = n_0 e^{\alpha x}$	2	
	求出單位時間到達正極板的總電子數： $n_d = n_0 e^{\alpha d}$ 。	1	
(B) 12 分	列出 $m(x) = m(x + dx) + dn$ 。	1	
	得出 $d(n + m) = 0$ ，即 $n(x) + m(x) = N_d$ 。	2	
	列出 $dn = [\alpha n(x) + \beta m(x)]dx$ 。	1	
	化簡得出 $dn = [(\alpha - \beta)n(x) + \beta N_d]dx$	2	
	積分得出 $n(x) + \frac{\beta N_d}{\alpha - \beta} = C e^{(\alpha - \beta)x}$ 。	2	
	將 $n(0) = n_0$ 代入得出 $\frac{n(x) + \frac{\beta N_d}{\alpha - \beta}}{n_0 + \frac{\beta N_d}{\alpha - \beta}} = e^{(\alpha - \beta)x}$ 。	1	
	將 $n(d) = N_d$ 代入上式得出 $e^{(\alpha - \beta)d} = \frac{N_d \alpha}{n_0(\alpha - \beta) + \beta N_d}$ 。	1	
(C) 9 分	列出 $d\tilde{n} = \alpha \tilde{n}(x)dx$	1	
	積分得出 $\tilde{n}(x) = \tilde{n}_0 e^{\alpha(x - \xi)}$	3	
	求出每單位時間、每單位面積到達 x 的電子總數 $\tilde{N}(x) = \frac{v}{\alpha} [e^{\alpha x} - e^{\alpha(x - d)}]$ 。	3	
	求得流過兩極板間氣體的電流密度 $J = \frac{ev}{\alpha} (e^{\alpha d} - 1)$ 。	2	

第 4 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	列出能量守恆式 $MgL = Mgy + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$	1	
	列出 $y = L \cos \theta \Rightarrow \dot{y} = -L(\sin \theta)\dot{\theta}$ 。	1	
	得出 $MgL = MgL \cos \theta + \frac{1}{2}M(L \sin \theta)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2$	1	
	求出 $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{6g(1-\cos \theta)}{L(3 \sin^2 \theta + 1)}}$ 。	1	
	求出落地前瞬間 $\dot{\theta} = \sqrt{3g/(2L)}$ 。	1	
(B) 2 分	求出 $\dot{y} = -\sqrt{\frac{6gL \sin^2 \theta (1-\cos \theta)}{(3 \sin^2 \theta + 1)}}$ 。	1	
	落地前瞬間 $\theta = 90^\circ$ ， $\dot{y} = -\sqrt{3gL/2}$ 。	1	
(C) 5 分	列出 $x = -L \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = -L(\cos \theta)\dot{\theta}$ 。	1	
	求出 $\dot{x} = -\sqrt{\frac{6gL \cos^2 \theta (1-\cos \theta)}{(3 \sin^2 \theta + 1)}}$	1	
	大略畫出細鐵條的底端速度 $\dot{x}$ 與角度 θ 的關係圖	3	
(D) 5 分	列出 $M\ddot{y} = N - Mg$	1	
	求出 $\ddot{y} = -3g \left[\frac{\sin^2 \theta (3 \sin^2 \theta + 1) + 2(1-\cos \theta) \cos \theta}{(3 \sin^2 \theta + 1)^2} \right]$ 。	2	
	求出 $N = Mg \left[\frac{4-6 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta}{(3 \sin^2 \theta + 1)^2} \right]$ 。	1	
	求出落地前瞬間 $N = Mg/4$	1	
(E) 6 分	求出相對於下端的轉動慣量 $\tilde{I} = \frac{4}{3}ML^2$	1	
	列出能量守恆式 $MgL = MgL \cos \theta + \frac{2}{3}ML^2\dot{\theta}^2$ 。	1	
	求出 $\ddot{y} = \frac{3g(3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1)}{4}$	1	
	求出 $\ddot{x} = \frac{3g \sin \theta (-2 + 3 \cos \theta)}{4}$	1	
	列出 $\mu N - M\ddot{x} = 0$ 。	1	
	得出 $\frac{\mu Mg(9 \cos^2 \theta_0 - 6 \cos \theta_0 + 1)}{4} - \frac{3Mg \sin \theta_0 (-2 + 3 \cos \theta_0)}{4} = 0$ 。	1	

(F) 2 分	$\theta_0 \approx 4\mu/3$	2	
------------	---------------------------	---	--

第 5 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	列出 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (zF_r - rF_z)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ，。	2	
	力矩無 z 方向分量，故 L_z 守恆 $L_z = mr^2\dot{\theta} = \text{constant}$ 。	2	
(B) 8 分	列出 $dE_r = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qdz/2a}{r^2+z^2} \cos\theta$ ，其中 $\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$ 。	2	
	得出 $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r\sqrt{r^2+a^2}}$ 。	2	
	電場提供點電荷圓周運動的向心力： $qE_r = m\omega_0^2 r_0$ 。	2	
	求出 $\omega_0 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{mr_0^2 \sqrt{r_0^2+a^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$	2	
(C) 9 分	得出 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 。	1	
	得 r 方向的加速度分量為 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 。	2	
	列出牛頓第二定律： $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = F_r/m = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{mr\sqrt{r^2+a^2}}$ 。	2	
	化簡得到： $\ddot{r} = \frac{r_0^4\omega_0^2}{r^3} - \frac{r_0^2\omega_0^2\sqrt{r_0^2+a^2}}{r\sqrt{r^2+a^2}}$ 。	2	
	求得 $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{r_0^2+2a^2}{r_0^2+a^2}}$ 。	2	
(D) 4 分	列出 $mr_0^2\omega_0 = mr_0^2(1 + \epsilon\sin\omega t)^2\omega_0(1 - \epsilon\alpha_0\sin\omega t)$	2	
	求得出 $\alpha_0 = 2$ 。	2	

第 6 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 6 分	寫出串聯 LCR 電路的阻抗 $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, 其中 $X_L = \omega L$; $X_C = 1/(\omega C)$ 。	2	
	阻抗 Z 有最小值時共振頻率 $f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 。	2	
	反共振頻率 $f_a = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC'}}$ 。 C 和 C_0 二電容串聯，故 $\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C}$ 。	2	
(B) 5 分	求出固體中聲速， $v = \sqrt{Y/\rho} \approx 5.50 \times 10^3 \text{ m/s}$	2	
	求出波長 $\lambda = v/f = 5.50 \times 10^{-3} \text{ m}$	1	
	求出 $\ell = \frac{1}{2}\lambda = 2.75 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。	2	
(C) 4 分	列出 $\kappa^2 \equiv \frac{\text{系統儲存的力學能}}{\text{系統儲存的全部能量}}$	1	
	$\kappa^2 = \frac{C}{C+C_0} = 1 - \frac{f_s^2}{f_a^2}$ 。	3	
(D) 8 分	求出 $f_a = \frac{f_s}{\sqrt{1-\kappa^2}} \approx 1.005 \text{ MHz}$	2	
	得出 $\frac{f_a}{f_s} = \sqrt{\frac{C+C_0}{C_0}}$ 。	1	
	得出 $C = 0.05 \text{ pF}$ 。	2	
	得出 $L = \frac{1}{C(2\pi f_s)^2} \approx 0.51 \text{ H}$	3	
(E) 2 分	求出品質因子 $Q = \frac{1}{2\pi f_s RC} = 1.47 \times 10^5$	2	