

2020年第21屆亞洲物理奧林匹亞競賽 及第51屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2020年2月22日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

- 一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
- 二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 三、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t 為時間, x 為任意物理量)

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$, $f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$;

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} , \quad \ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} .$$

2. $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}$, $m \neq -1$; $\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$;

$$\frac{d}{dx} (ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1} ; \quad \frac{d}{dx} \ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1} .$$

3. $\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$, $\frac{d \sin ax}{dx} = a \cos ax$, $\frac{d \cos ax}{dx} = -a \sin ax$;

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} , \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax , \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax .$$

4. 當 $|x| \ll 1$, $(1+x)^\alpha \approx 1+ax$,

$$e^x \approx 1+x , \quad \sin x \approx x , \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} .$$

5. 線性、常係數、齊次一階微分方程式 $ax'(t) + bx(t) = 0$

的一般解形式為 $x(t) = \alpha e^{st}$,

其中 s 是右列一次方程式 $as + b = 0$ 的根 ,

而 α 是積分常數 , 可由初始條件 $x(0)$ 決定。

6. 線性、常係數、齊次二階微分方程式 $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$

的一般解形式為 $x(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t}$,

其中 s_1, s_2 是右列二次方程式 $as^2 + bs + c = 0$ 的根 ,

而 α_1, α_2 是積分常數 , 可由初始條件 $x(0), x'(0)$ 決定。

2020年第21屆亞洲物理及第51屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、內燃機

- (A) 奧圖(Otto)引擎為內燃機常見的型態。其運轉步驟如圖 1 所示。 $1 \rightarrow 2$ 與 $3 \rightarrow 4$ 為絕熱過程， $2 \rightarrow 3$ 與 $4 \rightarrow 1$ 為等體積過程。試求奧圖引擎之效率 e_0 。
- (B) 阿特金森(Atkinson)引擎乃由奧圖引擎改良而來，近年來越來越常裝置於私家客車上。其標準運轉步驟如圖 2 所示。 $1 \rightarrow 2$ 與 $3 \rightarrow 4$ 為絕熱過程， $2 \rightarrow 3$ 為等體積過程，而 $4 \rightarrow 1$ 近似等壓過程。阿特金森引擎基本構想為，與奧圖引擎相較，藉降低壓縮比 $r_C = V_2/V_1$ 來減少燃燒油氣量，但仍享有同樣的對外作功膨脹比 $r_E = V_4/V_3$ 。試求阿特金森引擎之效率 e_A 。
- (C) 比較 r_C 相同（燃燒等量燃料）的奧圖引擎與阿特金森引擎。試定量比較兩個引擎的效率，何者效率較高？

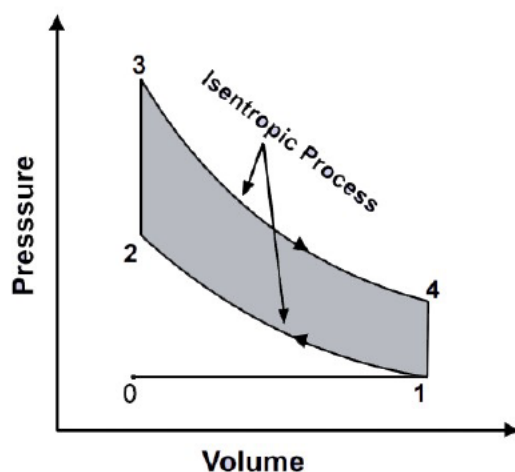


圖 1 奧圖(Otto)引擎

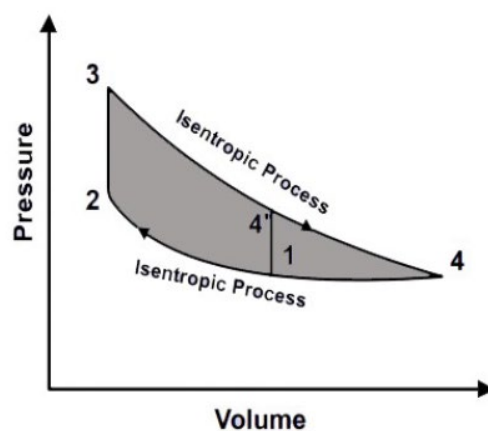


圖 2 阿特金森(Atkinson)引擎

二、法布立-培若干涉儀

法布立-培若干涉儀 (Fabry-Pérot interferometer) 中包含兩片平行的薄玻璃片 (玻璃片的厚度可忽略)，其中兩塊玻璃片相對的內表面都具有高反射率。如圖 3 所示，當光以傾斜角 θ 入射此干涉儀時，由於光波在兩玻璃片中多次反射，使得透射光在遠方的屏幕上形成同心圓的干涉條紋。設兩玻璃片的間距為 t ，屏幕與干涉儀的距離為 L ，入射光波長為 λ ，試回答以下問題。

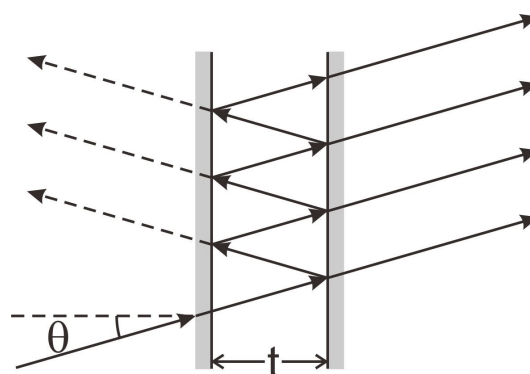


圖 3 法布立-培若干涉儀示意圖

- (A) 請計算建設性干涉的條件。
- (B) 算自中心點向外第 p 道干涉條紋的半徑。
- (C) 若將這兩塊間距為 t 的平行薄玻璃片換成厚度 t 、折射率 μ 的透明物體，這樣的系統稱為法布立-培若標準具 (Fabry-Pérot etalon)，如圖 4 所示。試問此時建設性干涉的條件、第 p 級干涉條紋的半徑分別為何？

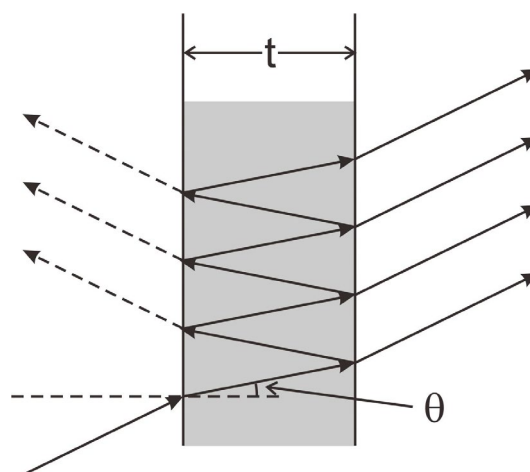


圖 4 法布立-培若標準具示意圖

- (D) 承(B)，我們可以透過調整玻璃片間距 t ，來辨識細微的波長差異，而測得精密的光譜。當入射光波長為 650 nm ，玻璃板間距為 2 cm ，屏幕與干涉儀的距離為 1 m ，且恰在屏幕上形成的同心圓的干涉條紋。若利用精密螺旋將玻璃間距調整 $\Delta t = 2 \mu\text{m}$ 後，在相同的位置再次觀察到同心圓干涉條紋，試計算這個情況下形成干涉的光波長。

三、鏡像法

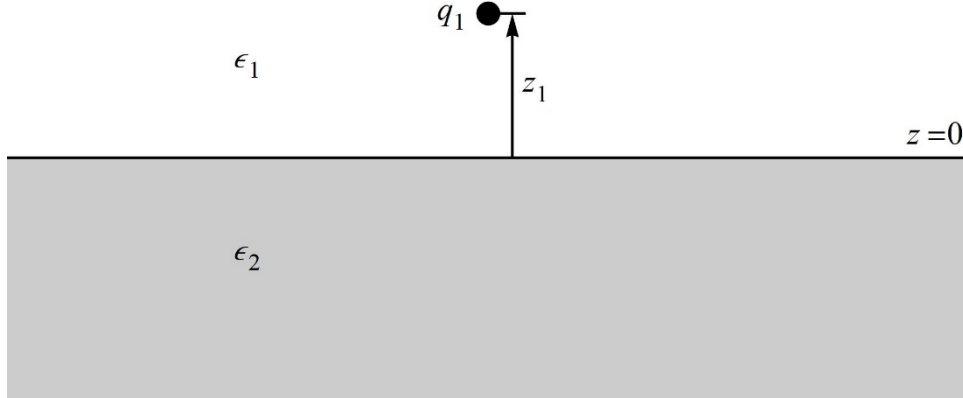


圖 5

如圖 5 所示，考慮位於 $\mathbf{r}_a = z_a \hat{\mathbf{z}}$ ($z_a > 0$) 的點電荷 q_a 。若已知靜電場 $\mathbf{E}$ 在介質的邊界上必須滿足兩個邊界條件: (i) $\mathbf{E}$ 的切向分量連續; (ii) $\epsilon \mathbf{E}$ 的法向分量連續。由鏡像法我們預期在 $z \geq 0$ 區域的電場會是由原電荷與位於 $\mathbf{r}'_a$ 處的鏡像電荷 q'_a 疊加而成; 而在 $z < 0$ 區域的電場則會是由位於 $\mathbf{r}''_a$ 處的等效電荷 q''_a 所產生，即

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \frac{q_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)}{4\pi\epsilon_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|^3} + \frac{q'_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_a)}{4\pi\epsilon_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_a|^3}, & z \geq 0; \\ \frac{q''_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}''_a)}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}''_a|^3}, & z < 0. \end{cases}$$

- (A) 證明 $q'_a = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_a$ ， $q''_a = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_a$ ， $\mathbf{r}'_a = -z_a \hat{\mathbf{z}}$ ， $\mathbf{r}''_a = z_a \hat{\mathbf{z}}$ 。
- (B) 求電荷 q_a 所受到來自介電質 2 的作用力 $\mathbf{F}_a$ ，及由 $\mathbf{F}_a$ 所導致的電位能 V_a 。
- (C) 由電磁學知：電場 $\mathbf{E}$ 在介質中的能量密度為 $\frac{1}{2} \epsilon E^2$ 。利用這個觀念計算這個系統的能量，並與(B)小題的結果做比較。
- (D) 若有另一個位於 $\mathbf{r}_b = x_b \hat{\mathbf{x}} + z_b \hat{\mathbf{z}}$ 的點電荷 q_b ，且 $z_b < 0$ ，求 q_a 所受到來自 q_b 的作用力 $\mathbf{F}_{ab}$ ，及 $\mathbf{F}_{ab}$ 對應的電位能 V_{ab} 。
- (E) 承(D)小題，若 $z_b > 0$ ，且 $\mathbf{r}_a \neq \mathbf{r}_b$ 。求 q_a 所受到來自 q_b 的作用力 $\mathbf{F}_{ab}$ ，及 $\mathbf{F}_{ab}$ 對應的電位能 V_{ab} 。

四、彈跳的旋轉球

在各式的球類運動中常常可觀察到旋轉的球在擊打或碰撞後，其運動軌跡變得更加多樣。本題主要在探索一個旋轉球在碰撞後的彈跳行為。如圖 6 所示，球的質量為 M ，轉動慣量為 $I = \alpha MR^2$ ，此處 R 為球的半徑， α 為一參數，碰撞面為 x - z 面，球的入射速度 $\vec{v}_1 = v_{1x}\hat{x} + v_{1y}\hat{y}$ ，轉動角速度為 $\vec{\omega}_1$ ；碰撞後球的速度 $\vec{v}_2 = v_{2x}\hat{x} + v_{2y}\hat{y}$ ，轉動角速度為 $\vec{\omega}_2$ ， $\vec{\omega}_1 = \omega_1\hat{z}$ 、 $\vec{\omega}_2 = \omega_2\hat{z}$ ， f_s 為靜摩擦係數。為簡化問題我們考慮以下情況：

- (1) 忽略球所受的空氣阻力與重力，
- (2) 碰撞過程為彈性碰撞（動能守恆），
- (3) 碰撞點 O 固定不動（即球體與地面為絕對粗糙），
- (4) 垂直碰撞面的速度 $v_{1y} = -v_{2y}$ 。

回答以下問題：

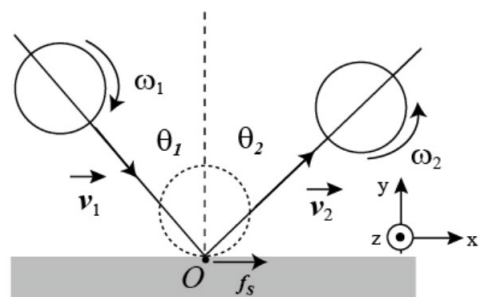


圖 6 彈跳的旋轉球

(A) 碰撞後的速度為 v_{2x} 與角速度為 ω_2 可以表為
$$\begin{cases} v_{2x} = av_{1x} + b(R\omega_1) \\ R\omega_2 = cv_{1x} + d(R\omega_1) \end{cases} \quad (1)$$

求參數 a, b, c , 與 d 。

(B) 考慮圖 7(a) 的情況，入射角 $\theta_1 = 45^\circ$ ， $\omega_1 = 0$ （無旋轉），球為一空心球， $\alpha = 1/3$ ，求 v_{2x}/v_{1x} 與 θ_2 。

(C) 考慮圖 7(b) 的情況，碰撞後角度為 $\theta_2 = 0^\circ$ ，求 ω_2/ω_1 與 $R\omega_1/v_{1x}$ 。

(D) 考慮圖 7(c) 的情況，球在兩點間彈跳，求 v_{2x}/v_{1x} ， ω_2/ω_1 與 $R\omega_1/v_{1x}$ 。

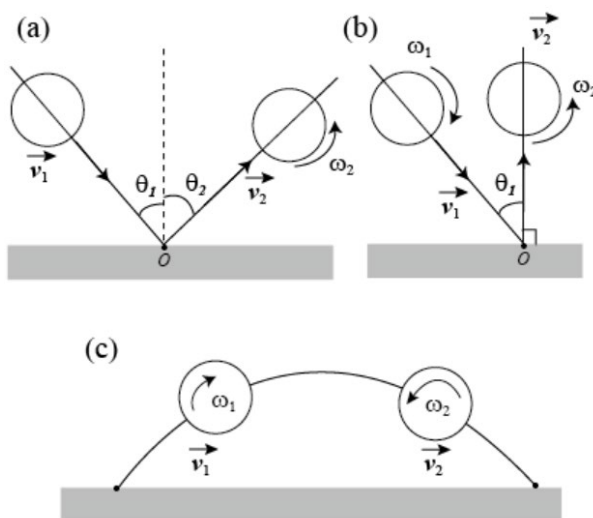


圖 7

五、帶電圓盤在靜磁場中的運動

如圖 8 所示，有一質量為 M 、半徑為 R 的均質絕緣圓盤，盤緣上等間距黏上 n 個點電荷 q ，點電荷質量可忽略不計。圓盤置於一固定的外加磁場 $\mathbf{B}$ 中（假設此磁場由一距離很遠的永久磁鐵提供）。將圓盤軸心令為 z 軸。已知外加磁場對 z 軸具有圓柱對稱性（意即磁場在圓柱座標中只為 r 與 z 的函數，且只有 r 與 z 分量，其中 r 為對軸心的距離），且磁場的 z 分量為 $B_z = B_0 + B_1 z$ 。初始時，此圓盤以角速度 $\omega_0 \hat{\mathbf{z}}$ 旋轉，並可自由移動。（假設並無任何微擾力矩造成圓盤傾斜，且電荷運動所造成的磁場遠小於外加磁場，故可忽略。）

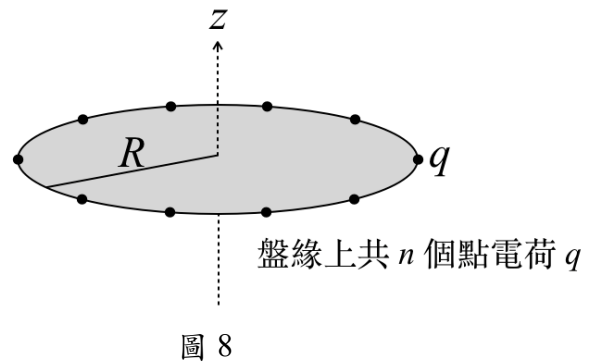


圖 8

（假設並無任何微擾力矩造成圓盤傾斜，且電荷運動所造成的磁場遠小於外加磁場，故可忽略。）

- (A) 試求出此外加磁場的 r 分量 B_r 對位置的函數。
- (B) 試求出當圓盤角速度為 $\omega \hat{\mathbf{z}}$ 、圓盤質心線速度為 $\dot{z} \hat{\mathbf{z}}$ 時，磁場施加於圓盤邊緣上任一點電荷的磁力（以 $\hat{\mathbf{r}}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$ 表示，其中 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 為沿切線方向的單位向量）。
- (C) 試寫下此帶電圓盤的運動方程式，進而求出
 - i. 此圓盤在 z 軸上的位置對時間的函數。（設初始位置 $z = 0$ 。）
 - ii. 此圓盤角速率對時間的函數。
- (D) 試依下列步驟分析此系統之能量。
 - i. 請求出此圓盤系統質心動能之時變率。（可用 $\dot{z}$ 表示。）
 - ii. 勞倫茲力顯示：運動中的電荷所受磁力方向與電荷速度垂直，故磁力必不作功。但上述(i)小題的答案不為零，故質心每單位時間所獲之動能應來自系統另一部份所損失的功率。試分析此圓盤系統相對於質心的動能，以詮釋此系統之能量守恆。

提示：圓盤相對於軸心的轉動慣量為 $MR^2/2$ 。

六、動線圈麥克風的斷路響應

- (A) 一個阻尼諧振子的質量為 m 、阻力常數為 b 、力常數為 k ，在外力 $F_0 \cos \omega t$ 的驅動下，其位移 x 、速度 $\dot{x}$ 與加速度 $\ddot{x}$ 滿足下列關係式：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

上式與 LRC 串聯電路在電動勢 $V_0 \cos \omega t$ 驅動下，其電容器上電荷 $Q(t)$ 所滿足的微分方程式，在形式上是類似的：

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t \quad (2)$$

上二式中的 ω 為角頻率。

因此，仿照 LRC 電路的電阻 R 、電抗 X 、電阻抗 Z ，我們也可以定義用於分析力學振盪器的力學阻 R' 、力學抗 X' 、力學阻抗 Z' 。(注：力學阻、力學抗也簡稱為力阻、力抗。) 試利用(1)、(2)兩式的類似性，給出上述諧振子運動的 R' 、 X' 、 Z' 。

- (B) 考慮如圖 9 所示、在外力 $F(t) = F_0 \cos \omega t$ 作用下做直線運動的質點-理想彈簧系統：在圖 9 中的外力 F ，作用於力常數為 k 的彈簧末端，且作用點以速度 v 向右運動，以致質量 m 的質點以速度 v_m 運動。

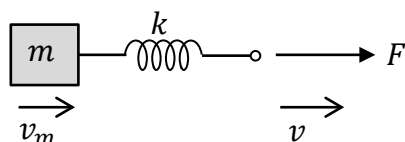


圖 9

就圖 9 所示系統，試畫出可用以分析運動速度 v 的等效電路圖，並於圖上標示出各等效電路元件所對應的力學物理量，以之解出質點速度 v_m 。

- (C) 一個動線圈麥克風的截面圖(下方開管以外的部分具圓柱對稱性)如圖 10 所示：

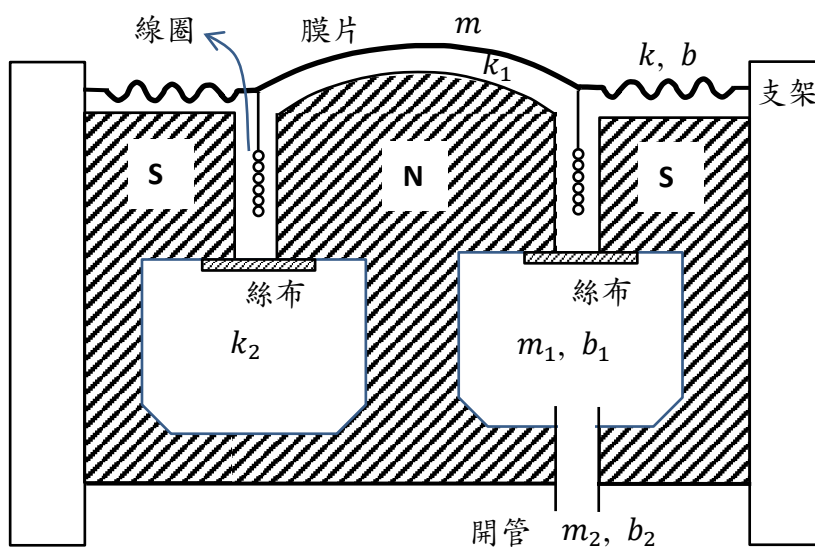


圖 10

此麥克風的工作用原理如下：質量為 m 之拱形膜片，在聲波壓力 P 的推動下會振動，使得固定於膜片的線圈，在靜止磁鐵的水平徑向磁場 B 中運動，產生感應電動勢 $\mathcal{E}$ ，而成為輸出信號。

如圖 10 所示，振動膜片在周邊以表面呈波狀的環帶支撐，並連接到磁鐵固定支架上，環帶的力常數為 k ，阻力常數為 b ；力常數 k_1 主要來自膜片下方空腔內受壓縮的空氣，而質量 m_1 與阻力常數 b_1 主要來自通過絲布中毛細管孔的空氣；力常數 k_2 、質量 m_2 與阻力常數 b_2 都相當小，主要來自絲布下方空腔內的空氣，可以忽略。

圖 11 為動線圈麥克風的力學類比：

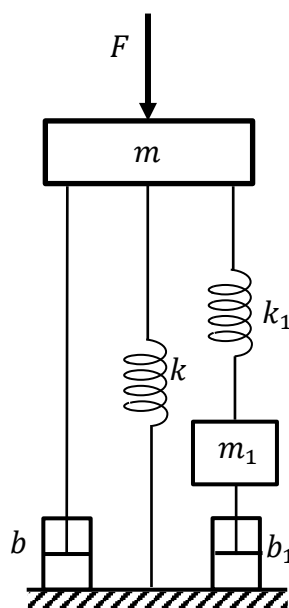


圖 11

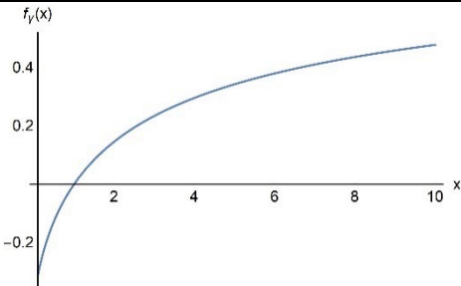
試畫出圖 11 所示阻尼振盪系統的等效電路(忽略重力)，並於圖上標示出各等效電路元件所對應的力學物理量。

假設聲波振動的角頻率為 ω ，試利用等效電路，求出無輸出電流時(即斷路時)麥克風的複數阻抗 Z (複數相量以正體符號表示)。

已知聲壓的振幅為 P ，拱形膜片的截面積為 A ，線圈在磁場中的導線總長為 l ，則此麥克風在無輸出下的斷路響應 $M_D \equiv \mathcal{E}/P$ 為何？

2020 年第 21 屆亞洲物理及第 51 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試參考解答

第 1 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 9 分	列出 $Q_h = C_V(T_3 - T_2)$, $Q_c = C_V(T_4 - T_1)$	2	
	列出 $\frac{Q_c}{Q_h} = \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} = \frac{V_1(P_4 - P_1)}{V_2(P_3 - P_2)}$	2	
	列出 $P_4 V_1^\gamma = P_3 V_2^\gamma$ 及 $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$	2	
	列出 $e_0 = 1 - Q_c/Q_h$	1	
	得出 $e_0 = 1 - r^{\gamma-1}$, $r \equiv V_2/V_1$ 。	2	
(B) 9 分	列出 $Q_h = C_V(T_3 - T_2)$, $Q_c = C_P(T_4 - T_1)$	2	
	列出 $\frac{Q_c}{Q_h} = \gamma \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$ 。	2	
	列出 $T_2 = T_1 r_C^{1-\gamma}$	1	
	得出 $T_4 = T_1(V_4/V_1) = T_1(r_C r_E)$	2	
	得出 $T_3 = T_4 r_E^{\gamma-1} = T_1(r_C r_E^\gamma)$	2	
(C) 7 分	寫出 $e_A - e_0 = r_C^{\gamma-1} \left\{ 1 - \gamma \left[\frac{(r_C r_E)^\gamma - 1}{(r_C r_E)^{\gamma-1}} \right] \right\} = r_C^{\gamma-1} f_\gamma(x)$, 其中 $f_\gamma(x) = 1 - \gamma \frac{x-1}{x^\gamma-1}$, $x = (r_C r_E)$ 。	2	
	當 $\gamma > 1$, 用微分作數學證明或作圖顯示證 $f_\gamma(x)$ 為單調遞增函數。 	3	
	當 $x > 1$, $f_\gamma(x) > 0$, 即 $e_A > e_0$ 。 當 $x < 1$, $f_\gamma(x) < 0$, 即 $e_A < e_0$ 。	2	

第 2 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 7 分	列出相鄰兩透射光的光程差： $\Delta l = \overline{BC} + \overline{CK}$ ，	2	
	得出 $\overline{BC} = \frac{t}{\cos\theta}$ ， $\overline{CK} = \overline{BC} \cos 2\theta$ ，	2	
	列出建設性干涉的條件： $\Delta l = n\lambda$	2	
	化簡建設性干涉的條件： $\Delta l = \frac{t}{\cos\theta} (1 + \cos 2\theta) = 2t \cos\theta = n\lambda$ 。	1	
(B) 8 分	列出第 p 道干涉條紋的半徑 r_p 與對應的角度 θ_p 的關係： $r_p = L \tan\theta_p$ 。	2	
	$\theta_p \ll 1 \Rightarrow r_p \approx L\theta_p$ 。	1	
	$n_p = \frac{2t \cos\theta_p}{\lambda} \approx \frac{2t}{\lambda} (1 - \theta_p^2/2)$ ， 得出 $\theta_p = \sqrt{2 \left(1 - \frac{n_p \lambda}{2t}\right)}$ 。	2	
	$n_p = (2t/\lambda - \varepsilon) - (p - 1) \approx 2t/\lambda - (p - 1)$ 。	1	
	得出 $r_p \approx L \sqrt{\frac{\lambda}{t} (p - 1)}$	2	
(C) 5 分	改為使用厚度 t 、折射率 μ 的某透明物體代替平行玻璃片，則波長變為 λ/μ 。	1	
	建設性干涉條件變為 $\Delta l = 2t \cos\theta = n\lambda/\mu$ 或 $2\mu t \cos\theta = n\lambda$ 。	2	
	第 p 道繞射的半徑變為 $r_p = L \sqrt{\lambda(p - 1)/(\mu t)}$	2	
(D) 5 分	在相同位置產生同心圓干涉條紋，代表 r_p 、 θ_p 相同： $\frac{\lambda}{t} = \frac{\lambda'}{t'} \Rightarrow \lambda' = \frac{t'}{t} \lambda$ 。	3	
	當 $t' = 2.0002 \text{ cm}$ ， $\lambda' = 650.065 \text{ nm}$ ； 當 $t' = 1.9998 \text{ cm}$ ， $\lambda' = 649.935 \text{ nm}$ 。	2	

第 3 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 6 分	由 $\mathbf{E}$ 的切向分量連續得出： $\frac{q_a}{\epsilon_1} + \frac{q'_a}{\epsilon_1} = \frac{q''_a}{\epsilon_2}$ 。	2	
	由 $\epsilon \mathbf{E}$ 的法向分量連續得出： $q_a - q'_a = q''_a$	2	
	解出：	2	
	$q'_a = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_a$, $q''_a = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q_a$		
(B) 5 分	求出 $\mathbf{F}_a = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)q_a^2 \hat{\mathbf{z}}}{16\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)z_a^2}$	2	
	列出 $V_a = - \int_{\infty}^{z_a} \mathbf{F}_a \cdot (dz_a \hat{\mathbf{z}})$	2	
	求出 $V_a = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)q_a^2}{16\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)z_a}$	1	
(C) 6 分	列出在 $z \geq 0$ 區域的能量： $\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \left\{ \frac{\epsilon_1}{2} \left(\frac{(q'_a)^2}{(4\pi\epsilon_1)^2 r - r'_a ^4} + 2 \frac{q_a q'_a (r - r_a) \cdot (r - r'_a)}{(4\pi\epsilon_1)^2 r - r_a ^3 r - r'_a ^3} \right) \right\}$	1	
	求出第一項： $\epsilon_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 q_a^2}{32\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 z_a}$ 。	1	
	求出第二項： $\epsilon_2 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)q_a^2}{16\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)z_a}$ 。	1	
	列出在 $z < 0$ 區域的能量： $\epsilon_3 = \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \left\{ \frac{\epsilon_2}{2} \left \frac{q''_a \{x\hat{x} + y\hat{y} + (z - z'_a)\hat{z}\}}{4\pi\epsilon_2 \{x^2 + y^2 + (z - z'_a)^2\}^{3/2}} \right ^2 - \frac{\epsilon_1}{2} \left \frac{q_a (r - r_a)}{4\pi\epsilon_1 r - r_a ^3} \right ^2 \right\}$	2	
	求出： $\epsilon_3 = \frac{-(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 q_a^2}{32\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 z_a}$ 。	1	
(D) 4 分	求出 $\mathbf{F}_{ab} = \frac{q_a q_b (-x_b \hat{x} + (z_a - z_b) \hat{z})}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) \{x_b^2 + (z_a - z_b)^2\}^{3/2}}$	2	
	求出 $V_{ab} = - \int_{\infty}^{z_a} \mathbf{F}_{ab} \cdot (dz_a \hat{\mathbf{z}}) = \frac{q_a q_b}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) \sqrt{x_b^2 + (z_a - z_b)^2}}$	2	
(E) 4 分	求出 $\mathbf{F}_{ab} = \frac{q_a q_b (-x_b \hat{x} + (z_a - z_b) \hat{z})}{4\pi\epsilon_1 \{x_b^2 + (z_a - z_b)^2\}^{3/2}} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)q_a q_b (-x_b \hat{x} + (z_a + z_b) \hat{z})}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2) \{x_b^2 + (z_a + z_b)^2\}^{3/2}}$ 。	2	
	求出 $V_{ab} = \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_1 \sqrt{x_b^2 + (z_a - z_b)^2}} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)q_a q_b}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2) \sqrt{x_b^2 + (z_a + z_b)^2}}$	2	

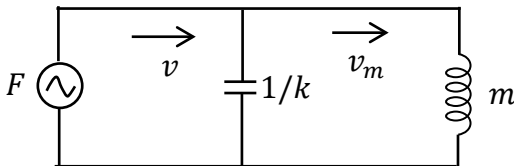
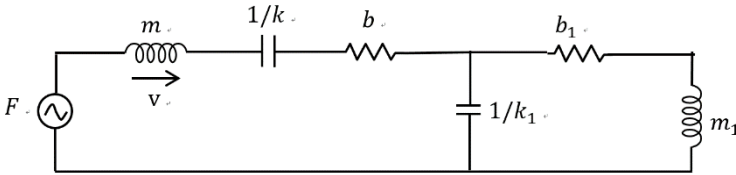
第 4 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 9 分	列出能量守恆 $K = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2$ 。	2	
	列出角動量守恆 $L = I\omega_1 - MRv_{1x} = I\omega_2 - MRv_{2x}$ 。	2	
	$v_{1x} - v_{2x} = \alpha R(\omega_1 - \omega_2)$ 。	1	
	求出 $\begin{cases} v_{2x} = -\frac{\alpha-1}{\alpha+1}v_{1x} - \frac{2\alpha}{\alpha+1}R\omega_1 \\ R\omega_2 = -\frac{2}{\alpha+1}v_{1x} + \frac{\alpha-1}{\alpha+1}R\omega_1 \end{cases}$ 。 $a = -\frac{\alpha-1}{\alpha+1}, b = -\frac{2\alpha}{\alpha+1}, c = -\frac{2}{\alpha+1}, d = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ 。	4	
(B) 6 分	若為空心球， $\alpha = 1/3$ ， 求出 $a = 1/2, b = -1/2, c = -3/2, d = -1/2$ 。	2	
	因 $\theta_1 = 45^\circ$ ， $v_{1x} = v_{1y}$ ；	1	
	已知 $\omega_1 = 0$ ，求得 $v_{2x}/v_{1x} = 1/2$ ， $R\omega_2/v_{1x} = -3/2$ 。 $\theta_2 = \tan^{-1}(v_{2x}/v_{2y}) = 26.56^\circ$ 。	3	
(C) 4 分	求出 $\omega_2/\omega_1 = -2$	2	
	求出 $R\omega_1/v_{1x} = 1$	2	
(D) 6 分	求出 $R\omega_1/v_{1x} = 3$	2	
	求出 $\omega_2/\omega_1 = -1$	2	
	求出 $v_{2x}/v_{1x} = -1$	2	

第 5 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	列出由磁場之高斯定律： $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$ 。	2	
	$B_r = -B_1 r/2$	2	
(B) 5 分	列出 $\mathbf{F}_{q,\text{ext}} = q\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$ 。	2	
	得出 $\mathbf{F}_{q,\text{ext}} = q\omega R(B_0 + B_1 z)\hat{\mathbf{r}} - \frac{q\dot{z}B_1 R}{2}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{q\omega R^2 B_1}{2}\hat{\mathbf{z}}$	3	
(C) 10 分	列出 $\frac{MR^2\dot{\omega}}{2} = nRF_{q,\phi}$ 。	1	
	得出 $\dot{\omega} = -\frac{nqB_1}{M}\dot{z}$ 。	1	
	列出牛頓第二定律： $M\ddot{z} = nF_{q,z}$	1	
	化簡得到 $\ddot{z} = \frac{nqR^2 B_1}{2M}\omega$	1	
	列出初始條件： $\omega(0) = \omega_0$ 、 $\dot{\omega}(0) = 0$ $z(0) = 0$ 、 $\dot{z}(0) = 0$	2	
	得出 $z(t) = \frac{M\omega_0}{nqB_1}(1 - \cos\Omega t)$	3	
	得出 $\omega(t) = \omega_0 \cos\Omega t$	1	
(D) 6 分	得出 $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_{q,\text{ext}} = \frac{nq\omega R^2 B_1}{2}\hat{\mathbf{z}}$	2	
	得出質心動能時變率： $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{nq\omega R^2 B_1}{2}\dot{z}$	1	
	得出 $\boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{r}_q \times \mathbf{F}_q = -\frac{nq\dot{z}B_1 R^2}{2}\hat{\mathbf{z}}$	1	
	得出轉動動能時變率： $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{nq\omega R^2 B_1}{2}\dot{z}$	1	
	得出能量守恆的結論。	1	

第 6 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	得出力學阻： $R' = b$	1	
	得出力學抗： $X' = (\omega m - k/\omega)$	2	
	得出力學阻抗： $Z' = \sqrt{b^2 + (\omega m - k/\omega)^2}$ 。	1	
(B) 8 分	畫出等效電路：  質量m(相當於電感)與力常數的倒數$1/k$(相當於電容)並聯(2 分)；速度v相當於電路總電流，具有分支(1 分)；施力F相當於外加電動勢源，跨接於電感、電容 (1 分)。	4	
	寫出 $v = \frac{F}{Z} = \frac{F_0}{\omega m} e^{j(\omega t - \pi/2)} \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)$	1	
	求出 $v = \text{Re}(v) = \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \frac{F_0}{\omega m} \sin \omega t$	1	
	求出 $v_m = \text{Re}(v_m) = \frac{F_0}{\omega m} \sin \omega t$	2	
(C) 13 分	畫出等效電路：  質量m_1與阻力常數b_1串聯(1 分)，再與$1/k_1$並聯(1 分)；質量m、力常數倒數$1/k$、阻力常數b三者串聯(1 分)，速度v相當於通過此串聯電路段的電流(1 分)；以上二電路段串聯後，接於施力F(相當於外加電動勢源)的兩端(1 分)。	5	
	得出等效阻抗 Z_1 ： $Z_1 = \frac{k_1(b_1 + j\omega m_1)}{j\omega(b_1 + j\omega m_1) + k_1}$ 。	2	
	得出整個線路的等效總阻抗 $Z_m = R_m + jX_m$ ， $Z_m = Z_1 + b + j\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)$ 。	3	

	得出麥克風在無輸出下的斷路響應M_D： $M_D \equiv \frac{\mathcal{E}}{P} = \frac{Blv}{F/A} = \frac{ABl}{Z_m}, \text{ 其中 } Z_m = \sqrt{R_m^2 + X_m^2}。$	3	
--	---	---	--