2022年第22屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第52屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2022 年 2 月 19 日
14：30~17：30
考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
三、各計算題請在答案卷上指定頁面的**正面**作答，每大題答案卷二頁。
四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t為時間，x為任意物理量)

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ ， $f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$;

   $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$ ， $\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$ 。

2. $\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}$; $\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1}$;

   $\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$; $\frac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)$; $\frac{d\cos(ax)}{dx} = -a\sin(ax)$

3. $\int(ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + \mathrm{C}$， $m \neq -1$; $\int(ax+b)^{-1}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + \mathrm{C}$;

   $\int\sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + \mathrm{C}$; $\int\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$，

   $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + \mathrm{C}$; $\int\frac{dx}{x} = \ln x + C$。(在此，C 為一個常數)

4. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ ， $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

5. 當$|x| \ll 1$， $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$

   $e^x \approx 1 + x$， $\sin x \approx x$， $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ 。

2022年第22屆亞洲物理及第52屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、水星軌道近日點的進動

若某行星及太陽的質量分別為m及M，且其他行星的效應可忽略，則由牛頓萬有引力定律可得知：此行星在太陽的重力作用下，其角動量ℓ及能量E的守恆式分別為

$mr^2\dot{\theta} = \ell$ 及 $\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$，其中$r$為行星與太陽的距離，G為重力常數，

且行星的運動軌跡為一橢圓，而太陽位於該橢圓的一個焦點。

(A) 假設已知廣義相對論的修正會使能量守恆式變為：

$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GM\ell^2}{mc^2r^3} - \frac{GMm}{r} = E + \frac{E^2}{2mc^2}$。若此系統容許兩個圓軌道，則角動量$\ell$必須滿足什麼條件?並求出這兩個圓軌道的半徑$r_+, r_-$（$r_+ > r_-$）。

(B) 承(A)小題，判斷$r = r_+$及$r = r_-$這兩個圓軌道是否為穩定軌道。

(C) 假設$r = r_+$這個圓軌道為穩定軌道，考慮行星稍微偏離$r = r_+$這個圓軌道的徑向運動，即$r = r_+ + \delta r$，且$|\delta r| \ll r_+$。行星會在徑向作簡諧運動，求徑向運動的角頻率ω_r，以G, M, r_+, r_-表示之。

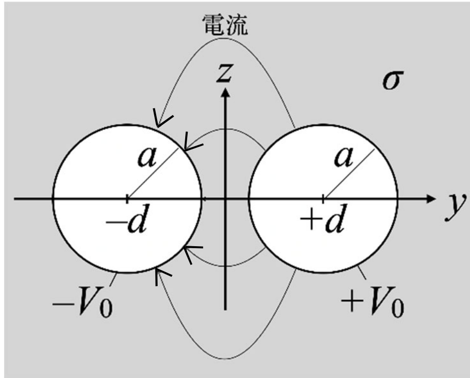
(D) 承(C)小題。由於廣義相對論的修正，這個行星的軌道將變成只是近似於橢圓，而非真正的橢圓。具體來說，這會使得這個行星的軌道平均角頻率$\omega_\theta \neq \omega_r$。求$\omega_\theta$，以$G, M, r_+, r_-$表示之。

(E) 承(C)、(D)小題。由於$\omega_\theta \neq \omega_r$，這個行星軌道的「長軸」會有進動。若$r_+ \gg r_-$，求其進動角頻率$\omega_p$，以$G, M, r_+, r_-$表示之。

(F) 已知重力常數$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$，光速為$c = 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$。太陽及水星質量分別為$M = 1.99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$、$m = 3.30 \times 10^{23}\ \mathrm{kg}$；近日點及遠日點距離為$r_1 = 4.60 \times 10^{10}\ \mathrm{m}$、$r_2 = 6.98 \times 10^{10}\ \mathrm{m}$。求廣義相對論所造成的水星近日點每世紀之進動角度。

二、長直圓管相關問題

兩根形狀相同之長直金屬圓管，半徑 a，管軸心分別位於$y=+d$與$y=-d$ ($d>a$)，平行 x 軸放置，其中一圓管表面電壓為 $+V_0$，另一圓管表面電壓為 $-V_0$，如圖一所示。圓管外填充著輕微導電的材料，電導率為 σ，電容率近似於 ϵ_0。請依以下步驟求出兩管之間每單位長度的電流（電流示意如圖一中箭頭）。



圖一

(A) 先考慮另一電荷分佈結構：兩條長直線材，平行 x 軸放置，分別位於 $y=+b$ 與 $y=-b$，其線電荷密度分別為 $+\lambda$ 與 $-\lambda$，$\lambda>0$。請求出空間的電位 $V(y,z)$。

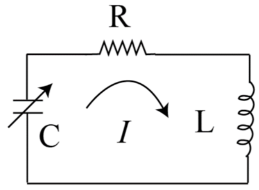
(B) 承上，求出等電位面的方程式(與 x 無關)。

(C) 欲符合題幹兩管之 V_0和 $-V_0$電位分佈，請求出 λ 須是多少？以$\alpha\equiv\frac{d}{a}$ 表示。

(D) 承上，求出題幹所問的每單位長度電流。

三、參數放大器

考慮圖二所示 RLC 電路，此處電容 C為一非線性電容，其值可表為 $C = C_0 - \Delta C sin(\omega_p t + \varphi)$，$0 < \Delta C << C_0$，$\varphi$ 為相位，ω_p為外加雜訊頻率。



圖二

考慮電容 C 兩端壓降 V 滿足

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d}{dt} + \omega_0^2 f(t)\right] V = 0$$

此處 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$,

回答以下問題:

(A) 寫下 $f(t)$, 只考慮 $\Delta C/C_0$ 一次項展開。

(B) 若 V 的近似解可表為:

$$V = Re\{V_0 exp(\alpha t) exp(\pm j\omega t)\}$$

其中$j = \sqrt{-1}$。

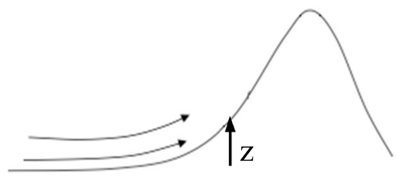
考慮 $\omega_p = 2\omega$，計算 ω 與 α (以 ω_0, φ，ΔC 與C_0 來表示)。

提示： 僅需計算 ω 頻率貢獻，忽略高頻項。

(C) 當$\alpha > 0$ 時，V 會隨時間增大，此時能量由ω_p 頻率電流轉移至ω頻率的訊號，而當$\alpha < 0$ 時，V 隨時間衰減，能量轉移過程相反。考慮 $\varphi = 0, \pi/2, \pi$ 時，討論 α 的值使ω 訊號增大或衰減與 ω_0, R, L, $\Delta C/C_0$的關係。

四、流動空氣爬升的流體力學

如圖三所示，考慮空氣快速沿地表向山上爬升之穩定層流，假設可忽略黏滯力且流動運動速度很快，因此在爬升的過程中可以假設無熱量的進出，即空氣是絕熱的，試回答以下問題：



圖三

(A) 假設空氣可視為雙原子理想氣體，平均分子量為M，試求溫度為$T°K$時，空氣的定容(體積固定)比熱c_v與定壓(壓力固定)比熱c_p（以氣體常數R與M表示）。設氣體的密度為ρ，壓力為P，試求在可逆的絕熱過程中，氣體沿地表向山上爬升過程中在ρ與P的參數空間中所描繪出之曲線的方程式。

(B) 在空氣快速沿地表向山上爬升的過程中，因為氣體是可壓縮的，其密度並不是固定的，同時因壓力改變，其內能與溫度也會改變。

(1)考慮一固定質量空氣沿穩定層流方向流動，試求密度可變化之柏努利方程式，即求出由壓力 P、速度v、密度ρ、高度h與每單位質量的內能u所組合而成的不變量。設重力加速度為g。

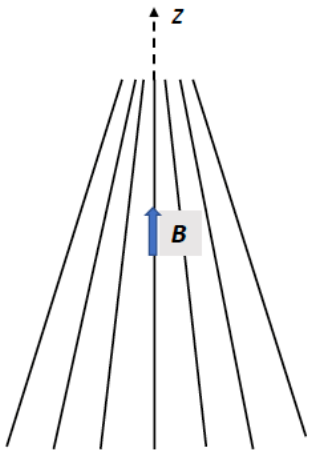
(2)在爬升的一小段過程中，高度改變為Δz，溫度改變為ΔT，氣體的速度平方（與動能成正比）改變為$\Delta(v^2)$，試求此三者改變量Δz、ΔT與$\Delta(v^2)$的關係（即滿足的關係式）。

(C) 在空氣沿地表向山上爬升之穩定層流中，靜力平衡可近似達成，若空氣由$z = z_i$爬升到$z = z_f$，溫度由T_i改變為T_f，試求 $\beta \equiv -\frac{T_f - T_i}{z_f - z_i}$。

五、非均勻磁場

空間中存在一繞 z 軸對稱的不均勻磁場，其示意圖如圖四所示。已知其磁場強度沿著 z 軸之變化率為一常數 c，即 $\frac{dB_z}{dz} = c$，試求

(A) 該磁場在徑向方向的分量與離對稱軸(z 軸)距離 r 之關係。



圖四

今有一半徑為 a，質量為 m，電阻為 R 的剛性細金屬環，由靜止狀態在該磁場中落下。假設金屬環中心在磁場的對稱軸上，環面與對稱軸垂直，試回答下列問題。

(B) 該金屬環中的電流量值與方向和其下落速率 v 之關係為何？

(C) 該金屬環下落時所受磁力之量值和方向與其下落速率 v 之關係為何？

(D) 試求金屬環下落速率與時間的關係，以及其終端速度為何？

六、圓形軌道上的鋼珠

近年來永動機不時地被拿出來討論，但由於大自然中不可避免的非保守力讓永動機於現實中幾乎不可能實現，以下考慮一個簡單的相關模型。如圖五，有一上端開放的正圓滑軌，固定在垂直於地平面的 xy 平面上，圓半徑為 1 m，另有個半徑可忽略的小鋼珠在其內側以逆時針方向滑動，質量為 m。小鋼珠在通過 A 點後騰空進行自由落體，然後以切線方向由 B 點再次進入軌道。若忽略空氣阻力及摩擦力，小鋼珠可在此系統中不停地以逆時針方向運行。重力加速度為 g。

(A) 求出小鋼珠由 A 點至 B 點的軌跡方程式。

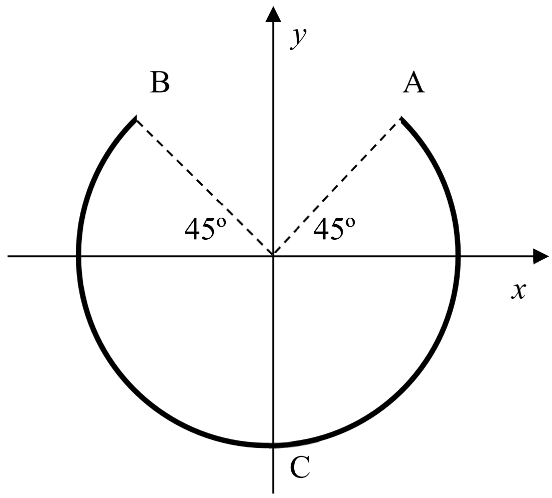
(B) 求出小鋼珠在整個過程中所能達到的最高高度，即 y 座標的最大值。

(C) 求出小鋼珠在滑軌底部最低點 C 點時的速率。

(D) 現在開始考慮小鋼珠和滑軌間的動摩擦力，動摩擦係數為 μ。假設小鋼珠在滑軌上某處的瞬時速率為 v、座標為 (x, y)，求此時其所受的動摩擦力 f。

(E) 承上，求此時小鋼珠於滑軌切線方向上的加速度量值。

(F) 在這個有動摩擦力的情況下，小鋼珠由 C 點滑至 A 點的過程中，受到摩擦力所作的功為何？ 答案請用一個 y 的積分式表之。



圖五

2022 年物理奧林匹亞複選考試
第 1 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 6 分	正確寫出 $\ell > 2\sqrt{3}\frac{GMm}{c}$	2	
	正確寫出 $r_{\pm} = \frac{\frac{\ell^2}{m^2c^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell^2}{m^2c^2}\right)^2 - 3\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2\left(\frac{\ell^2}{m^2c^2}\right)}}{\frac{2GM}{c^2}}$	4	
(B) 5 分	寫出正確 $V''_{eff}(r) = -\frac{2GMm}{r^3} + \frac{3\ell^3}{mr^4} - \frac{12GM\ell^2}{mc^2r^5}$	1	
	判斷 $V''_{eff}(r_+) > 0$，r_+為穩定軌道	2	需有判斷的依據
	判斷 $V''_{eff}(r_-) < 0$，r_-為不穩定軌道	2	
(C) 4 分	得到 $\omega_r = \sqrt{GM(r_+ - r_-)/r_+^2}$	4	寫出 $\omega_r = \sqrt{\frac{V''(r_+)}{m}}$ 可得 1 分
(D) 4 分	寫出 $\omega_\theta = \frac{\ell}{mr_+^2} = \sqrt{GM(r_+ + r_-)/r_+^2}$	4	寫出 $\omega_\theta = \frac{\ell}{mr_+^2}$ 可得 1 分
(E) 2 分	得到$\omega_p = \frac{r_-}{r_+}\sqrt{\frac{GM}{r_+^3}}$	2	寫出 $\omega_p = \omega_\theta - \omega_r$ 可得 1 分
(F) 4 分	得到正確 r_+ 的數值	1	範圍： $(4.5\sim6.5) \times 10^{10}$ m
	得到正確 r_- 的數值	1	範圍： $(3.5\sim5.5) \times 10^3$ m
	得到正確 ω_p 的數值	2	範圍： $(1\sim3.5) \times 10^{-4}$ rad/century 單位錯誤僅得 1 分

第 2 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	正確得出 $V(y,z)=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left\{\frac{(y+b)^2+z^2}{(y-b)^2+z^2}\right\}$	5	1) 寫出正確的電場形式可得 1 分 2) 直接積分者：若列式正確亦可得 1 分
(B) 2 分	寫出 $\frac{(y+b)^2+z^2}{(y-b)^2+z^2}=e^{4\pi\epsilon_0 V/\lambda}$ $(=\mu$ 常數$)$	2	
(C) 12 分	正確得出 $y^2+z^2+b^2-2yb\,\frac{e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\lambda}}+1}{e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\lambda}}-1}=0$ 或 $(y-b\beta)^2+z^2=b^2(\beta^2-1)$， $\beta=\frac{e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\lambda}}+1}{e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V}{\lambda}}-1}$	2	1) 方程式正確皆給分 2) 使用錯誤的 V(y,z)，但過程正確可得 1 分
	寫出等電位面為圓柱面	2	
	寫出 $d=b\beta$，$a=b\sqrt{\beta^2-1}$ 或 正確寫出 $\alpha=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}$	4	得出 d 、a 各得 2 分
	得出 $\lambda=\frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{\ln(2\alpha^2-1+2\alpha\sqrt{\alpha^2-1})}$	4	寫出兩個答案 $\frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{\ln(2\alpha^2-1\pm 2\alpha\sqrt{\alpha^2-1})}$ 僅得 2 分
(D) 6 分	寫出 $I=\sigma\int\vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\lambda\ell$	2	
	寫出正確 $i=4\pi\sigma V_0/\ln(2\alpha^2-1+2\alpha\sqrt{\alpha^2-1})$	4	僅寫 $i=\frac{\sigma\lambda}{\epsilon_0}$ 可得 2 分

第 3 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 7 分	寫出 $\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{d}{dt}+\frac{1}{LC}\right]V=0$	4	
	得出 $f(t)=1+\frac{\Delta C}{C_0}\sin(\omega_p t+\varphi)$	3	
(B) 8 分	寫出 $\left(\alpha^2-\omega^2+\frac{R}{L}\alpha+\omega_0^2\right)\cos(\omega t) -\left(2\omega\alpha+\frac{R}{L}\omega\right)\sin(\omega t) \approx -\omega_0^2\frac{\Delta C}{2C_0}[\sin\varphi\cos(\omega t)+\cos\varphi\sin(\omega t)]$	4	
	得出 $\omega^2=\omega_0^2+\alpha^2+\frac{R}{L}\alpha+\omega_0^2\frac{\Delta C}{2C_0}\sin\varphi$ $\alpha=-\frac{R}{2L}+\frac{\omega_0^2}{\omega}\frac{\Delta C}{4C_0}\cos\varphi$	4	
(C) 10 分	(i) 寫出: $\frac{\Delta C}{C_0}>\frac{2R}{\omega_0 L}\frac{\omega}{\omega_0}$ 時 $\alpha>0$，訊號增強 $\frac{\Delta C}{C_0}<\frac{2R}{\omega_0 L}\frac{\omega}{\omega_0}$ 時 $\alpha<0$，訊號衰減	4	
	(ii) 寫出 $\alpha=-\frac{R}{2L}<0$，訊號衰減	3	
	(iii) 寫出 $\alpha=-\frac{R}{2L}-\frac{\omega_0}{\omega}\frac{\Delta C}{4C_0}<0$，訊號衰減	3	

第 4 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 9 分	寫出 $c_v = \frac{5R}{2M}$	3	
	寫出 $c_v = \frac{7R}{2M}$	2	
	寫出$\frac{P^{\frac{5}{7}}}{\rho} =$ 常數	4	
(B) (1) 3 分 (2) 7 分	（1）寫出 $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + u + gh =$ 常數	3	
	（2）寫出 $\Delta(\frac{P}{\rho}) + \frac{1}{2}\Delta(v^2) + \Delta u + g\Delta z = 0$	2	
	（2）寫出 $\Delta(\frac{P}{\rho}) + \Delta u = c_p\Delta T$	3	
	（2）寫出 $\frac{1}{2}\Delta(v^2) + \frac{7R}{2M}\Delta T + g\Delta z = 0$	2	
(C) 6 分	寫出 $dP = -\rho g dz$	2	
	寫出 $\frac{dP}{\rho} = c_p dT$	2	
	得出 $\beta = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} = \frac{2Mg}{7R}$	2	

第 5 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	畫出適當的高斯面、並寫出正確 $$\oint \vec{B}\cdot d\vec{a}=0$$	2	
	得出 $B_r=-\frac{cr}{2}$	3	
(B) 7 分	寫出感應電動勢 $$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\pi a^2\frac{dB_z}{dt}$$	2	
	正確得出電流量值 $i=\frac{\pi a^2 vc}{R}$ 方向：逆時針（俯視）	5	方向 2 分
(C) 4 分	得出磁力量值 $$F_B=\pi^2a^4c^2\frac{v}{R}$$ 方向：向上	4	方向 1 分
(D) 9 分	寫出 $\int_0^t dt=\int_0^v \frac{1}{g-\frac{\pi^2a^4c^2}{m}v'}dv'$	3	
	得到 $v(t)=\frac{mgR}{\pi^2a^4c^2}(1-e^{\frac{\pi^2a^4c^2}{mR}t})$	4	
	終端速度（向下）$v_T=\frac{mgR}{\pi^2a^4c^2}$	2	

第 6 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	寫出運動軌跡 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2+\frac{3}{2\sqrt{2}}$	4	
(B) 2 分	最大高度 $$y=\frac{3}{2\sqrt{2}}$$	2	
(C) 5 分	得出 $v_c=\sqrt{2g\left(1+\sqrt{2}\right)}$	5	
(D) 4 分	摩擦力 $$f=(mv^2-mgy)\mu$$	4	
(E) 4 分	切線加速度量值 $$a_r=(v^2-gy)\mu+gx$$	4	
(F) 6 分	所作的功 $$W=m\mu\int_{-1}^{1/\sqrt{2}}\frac{v^2-gy}{\sqrt{1-y^2}}dy$$	6	未寫積分上下限扣 2 分