2023 年第 23 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 53 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2022 年 11 月 5 日
13：30~16：30
考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

1、本試題包括選擇填充混合題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
2、選擇填充混合題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。
5、限以藍色或黑色原子筆作答。

常用到的數學公式(t為時間，x為任意物理量) 與 轉動慣量之平行軸定理

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ ， $f''(x) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$；

   $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$ ， $\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$。

2. $\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}$； $\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1}$；

   $\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$； $\frac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)$； $\frac{d\cos(ax)}{dx} = -a\sin(ax)$

3. $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + \mathrm{C}$， $m \neq -1$； $\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + \mathrm{C}$；

   $\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + \mathrm{C}$； $\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$，

   $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + \mathrm{C}$； $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$。(在此，C 為一個常數)

4. $\sin^2 \alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ ， $\cos^2 \alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

5. 當$|x| \ll 1$，$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$，

   $e^x \approx 1 + x$， $\sin x \approx x$， $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$。

6. $I_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$，$I_0 = \sqrt{\pi}/2$， $I_1 = 1/2$，$I_2 = \sqrt{\pi}/4$

平行軸定理:

設直線L_{CM}通過一剛體的質心，若有一旋轉軸L平行於L_{CM}，則剛體繞此旋轉軸L轉動之轉動慣量 I 可寫為:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_{CM} + Md^2$$

其中 I_{CM} 為剛體繞質心旋轉軸 L_{CM} 轉動的轉動慣量，M 是剛體的質量，d 為 L 與L_{CM}之間的距離。

2023 年第 23 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 53 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含選擇填充混合題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、選擇填充混合題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、考慮一個2.0公斤的物體，將其放置在桌面上，並用一水平作用力F推動此物體，若此物體與桌面間的靜摩擦係數為0.20、動摩擦係數為0.15，且此水平推力大小隨時間的變化如圖 1 所示，取重力加速度大小$g =$ 9.8 m/s^2，試問第___(1)___秒時，物體正要由靜止開始運動。

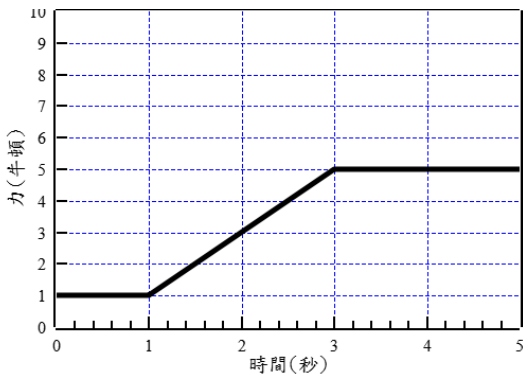


圖 1

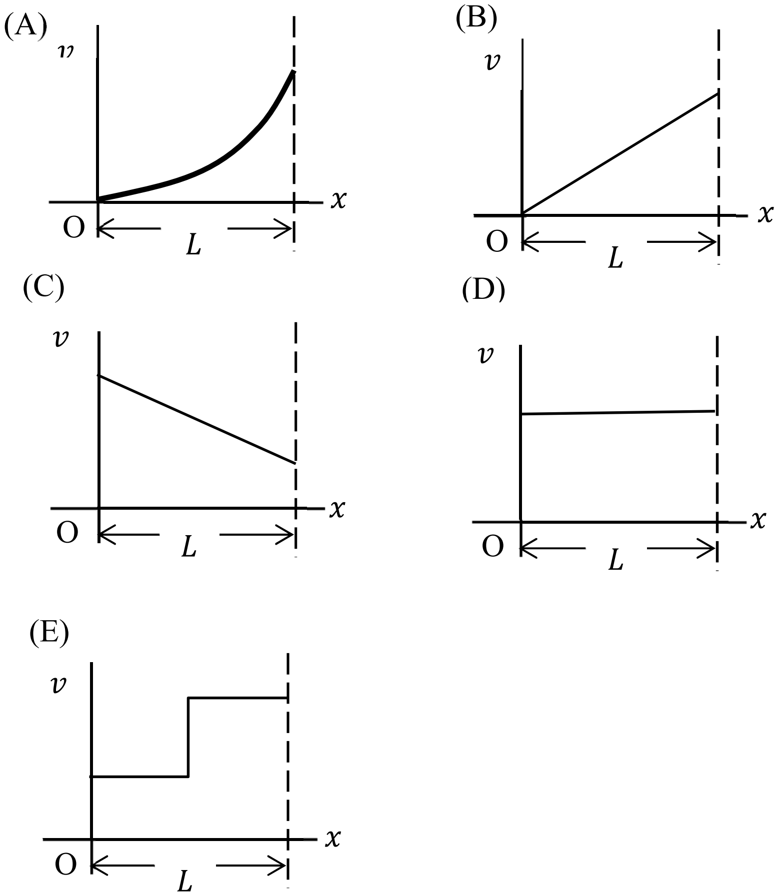
二、甲、乙兩個電子式燈泡在使用相同電壓時的耗電功率分別為 10 瓦、20 瓦，而且在使用時，這兩個燈泡的電阻都不會隨著電壓或是電流而改變。在相同電壓下使用這兩個燈泡時，下列敘述何者正確？

(A) 甲燈泡所需的電流是乙燈泡的兩倍；
(B) 甲燈泡的電阻是乙燈泡的兩倍；
(C) 甲燈泡的發光效能一定是乙燈泡的兩倍；
(D) 當兩燈泡從使用相同電壓改為通過相同的電流，則甲燈泡的耗電功率仍是乙燈泡的一半。答案填入：___(2)___。

三、一端開口一端封閉的細長吸管，對管口吹氣時可產生聲音。若吸管內徑 0.5 cm，管內空氣柱長度 15.0 cm，<u>在常溫常壓下吹氣</u>。以下敘述何者最可能是**錯誤**的？答案填入：___(3)___。

(A) 可能產生頻率約為 570 Hz 的聲音；
(B) 可能產生頻率約為 1140 Hz 的聲音；
(C) 可能產生頻率約為 1700 Hz 的聲音；
(D) 可能同時產生多種共振頻率的聲音。

四、 柱狀釹鐵硼的強力磁鐵沿著一長度為L的純銅金屬管中心下落，如圖 2 所示磁鐵置於金屬管上方。已知金屬管半徑僅略大於柱狀磁鐵的半徑，且磁鐵下落的過程中不會和管壁碰撞；在冷次定律的作用下，下降的磁鐵在金屬管長度L的範圍內，速率v對x (管內落下的距離)作圖最接近下列何者？答案填入：___(4)___。



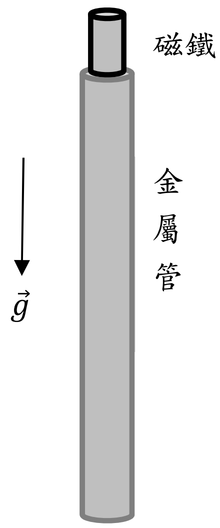


圖 2：磁鐵在純銅金屬管中下落

五、 質量均為 m 的兩物體（視為質點）以一均勻的輕彈簧相連結，將此裝置以一細繩垂直懸掛在天花板上，如圖 3 所示。到達靜態平衡時此裝置的長度為 $L+d$，其中 L 是彈簧的自然長度，$d=mg/k$ 是因維持底端物體不下掉的彈簧伸長量。底端物體距離地面的高度是 h，令 $T_h \equiv \sqrt{2h/g}$ 為自由落體從該高度下落到達地面所需的時間。在 $t=0$ 時將懸掛此裝置的細繩剪斷；則：(a)在細繩剪斷後的瞬間，頂端物體的加速度減底端物體的加速度等於(5)___。(需有量值與方向)

(b) 令底端物體碰到地面的時刻為 $t=T$，則下列陳述何者是正確的？答案填入：___(6)___。

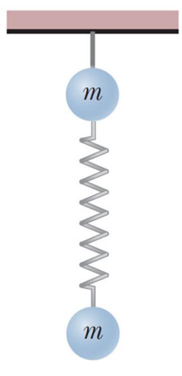


圖 3

(A) $T=T_h$

(B) 除了少數個別特定的 h 值外，一般情形下 $T<T_h$。

(C) 除了少數個別特定的 h 值外，一般情形下 $T>T_h$。

(D) 依不同 h 值的選擇，$T=T_h$、$T<T_h$ 與 $T>T_h$ 都有可能發生。

六、 一個固定不動的警報器，發出頻率為 800 Hz 的警報聲。風以 10 m/s 的速率穩定由西向東吹。假設在平靜空氣中的聲速為 343 m/s，而甲、乙兩人以 10 m/s 的速率分別從西側、東側接近警報器，則關於甲、乙偵測到的警報聲，下列敘述何者正確？答案填入：＿(7)＿。

【註】："視"頻率(或"視" 波速)是指在觀察者為靜止的座標系中所偵測到的頻率(或波速)。

(A) 甲偵測到的視頻率為$800\times\frac{343}{343-10}$ Hz，視波速為343 m/s；

(B) 甲偵測到的視頻率為$800\times\frac{343+10}{343-10}$ Hz，視波速為333 m/s；

(C) 乙偵測到的視頻率為$800\times\frac{343}{343-10}$ Hz，視波速為353 m/s；

(D) 乙偵測到的視頻率為$800\times\frac{343+20}{343-10}$ Hz，視波速為353 m/s。

七、 如圖 4 所示，一質量為 M 的均質繩子，兩端固定在同高的兩個釘子上。在繩中央掛一個質量為 m 的物體，繩中點和釘子處的繩切線方向與鉛垂線夾角分別為 α 和 β；則$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$等於下列何者？

答案填入：＿(8)＿。

(A) $\frac{M+m}{m}$ (B) $\frac{m}{M+m}$ (C) $\frac{M}{m}$ (D) $\frac{m}{M}$

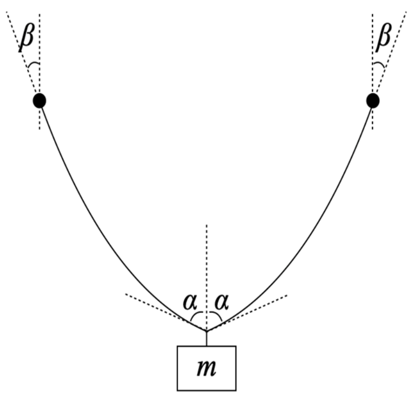


圖 4

八、 某生去打靶，子彈由槍管以 300 m/s 速度大小射出，若子彈的質量為 1 克，而且子彈在槍管的受力與時間的關係為 $F=200-\frac{2}{3}\times10^{5}\,t$。$F$ 的單位是牛頓，t 的單位是秒，求子彈從$t=0$秒靜止到射出槍管歷時＿(9)＿秒。

九、 (a) 1 莫耳，0 ℃的理想氣體絕熱可逆地膨脹為原體積的 2 倍，其熵變化為＿(10)＿ J/K 。

(b) 1 莫耳，0 ℃的理想氣體等溫可逆地膨脹為原體積的 2 倍，其熵變化為＿(11)＿ J/K 。(取到小數第一位)

十、 一雙質點彈簧系統有兩個質量皆為m的質點，彈簧常數為k，如圖 5 所示。考慮碰撞在平滑的水平桌面上進行，且質點皆只有平移運動，沒有滾動的運動。另外，質點 M 以初速V_0與質點 m 之間的碰撞視為正向彈性碰撞。雙質點彈簧系統原為靜止，且彈簧並未有任何拉伸狀態(彈簧自然長度為l_0)。試求彈簧在碰撞後能達到的最大位能 (答案以M、m、V_0 及 k表示)____(12)____。

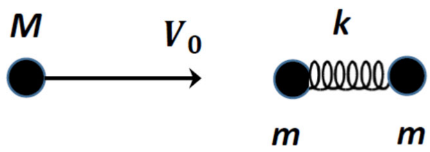


圖 5

十一、 如圖 6 所示，一不可伸縮、質量可被忽略之繩索掛過一滑輪(質量與摩擦力皆可忽略)，左邊連接上一質量為$2m$之木塊 A，右邊連接上兩質量皆為m之木塊 B 與 C，且 B 與 C 之間以一彈力常數為k之彈簧相連。今在左右兩邊達靜力平衡後，在 A 與 B 靜止不動情況下，將木塊 C 拉下使將彈簧伸長y後，再將整個系統包括木塊 A、B 與 C 釋放使其開始運動，且在運動過程中，繩索維持張緊狀態，試求釋放後彈簧的振盪角頻率，也就是彈簧伸長量y隨時間振盪的角頻率等於____(13)____。

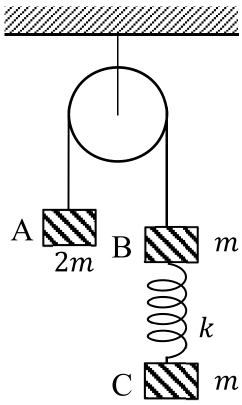


圖 6

十二、 1 號和 2 號兩種不同的單原子理想氣體分別裝入體積為V_1與V_2的絕熱容器中，兩容器中間以絕熱的隔板完全隔開，如圖 7 所示。1 號氣體有n_1莫耳、壓力為P_1；而 2 號氣體有n_2莫耳、壓力為P_2。

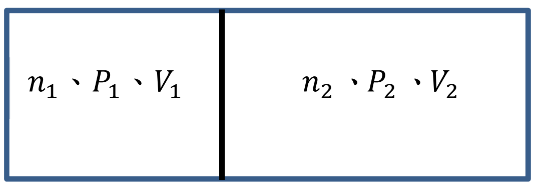


圖 7

(a)已知氣體常數為R，當絕熱隔板在瞬間移除，使兩容器合成一個總體積為V_1+V_2的容器，忽略移除絕熱隔板過程中對氣體所作的功；則兩氣體混合達平衡後的溫度$T_f =$____(14)____。

(b) 若 1 號氣體改為雙原子氣體，2 號仍為單原子氣體，且初始時$P_1 = P_2 = P$。已知本題中氣體 1 的振動動運可以忽略不計。試問兩氣體在絕熱隔板被移除後混合而達到的平衡壓力P_f，則P_f表達式為下列何者？答案填入：____(15)____。

(A) P　(B) $P\frac{(5V_1+3V_2)}{(V_1+V_2)}\times\frac{(n_1+n_2)}{(5n_1+3n_2)}$　(C) $P\frac{(V_1+V_2)}{(5V_1+3V_2)}\times\frac{(n_1+n_2)}{(5n_1+3n_2)}$

(D) $P\frac{(5V_1+3V_2)}{(V_1+V_2)}\times\frac{(5n_1+3n_2)}{(n_1+n_2)}$　(E) $P\frac{(V_1+V_2)}{(5V_1+3V_2)}\times\frac{(5n_1+3n_2)}{(n_1+n_2)}$

十三、　一個兩端封閉的細長管內，裝有總質量為M、一莫耳的理想氣體，已知氣體溫度為T，氣體常數為R，細長管的截面積為A；由理想氣體方程式可知某處氣體壓力P與該處氣體密度ρ成正比。則

(a)當管以一端為旋轉軸，在水平面上以等角速率ω轉動；如圖 8 所示，沿著管軸心的方向為x軸，轉軸位置為$x=0$。此時管中氣體壓力$P(x)$和密度$\rho(x)$亦為x的函數；且在x位置的氣體壓力梯度與密度成正比，即$\frac{\Delta P(x)}{\Delta x}=\beta\cdot\rho(x)$；則$\beta=$____(16)____；

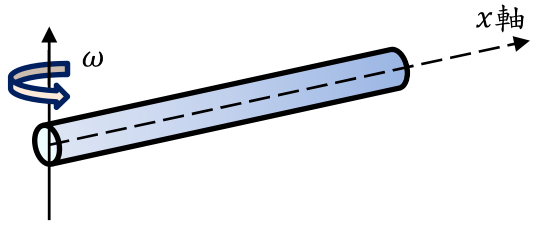


圖 8：封閉的管以ω角速度旋轉。

(b) 已知管的旋轉速率不高時，氣體溫度T維持不變；則管中氣體密度分布可以寫為$\rho(x)=\rho_0 e^{\gamma x^2}$，其中$\rho_0$為$x=0^+$處的密度，求 $\gamma=$ ____(17)____ 。

十四、　水平光滑地面上有一質量為m的均質立方塊甲，邊長為d，自左向右以速率v滑行，平面右端有一質量同為m的均質立方塊乙，但其邊長遠小於d，可視為質點，如圖 9。當甲滑行至乙時，兩者發生碰撞。空氣阻力可忽略，重力加速度為g，立方塊繞通過質心且垂直紙面之旋轉軸的轉動慣量為 $\frac{md^2}{6}$。假設碰撞過程為完全非彈性碰撞，則在碰撞後的瞬間，甲的角速率為____(18)____。

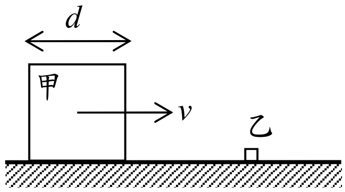


圖 9

十五、　現有一質量為m、半徑為 R、長度為 l 的圓柱體，在斜角為 θ 的長斜面上，以初速 v_0 向上運動，如圖 10 所示。已知圓柱體繞中心軸轉動慣量為 $I=\frac{1}{2}mR^2$。考慮下面兩種情況: 斜面光滑無摩擦，圓柱體純滑動從開始上坡後回到原位置所需時間為t_1。若斜面粗糙，圓柱體做純滾動運動，則同上行程耗時t_2。求t_2/t_1 比值等於____(19)____。

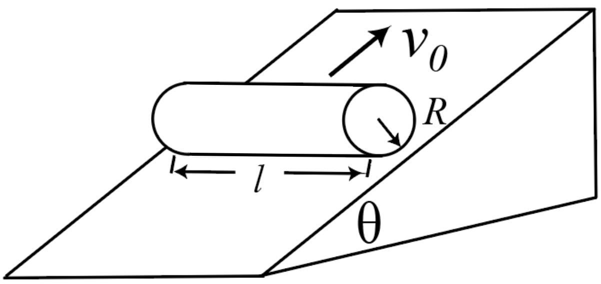


圖 10

十六、　如圖 11 所示，一個溫度保護裝置由兩片金屬板和兩條導線構成。當兩條導線接觸而短路時，就會關閉儀器。此裝置在室溫(絕對溫標) T_0 時，兩導線的長度分別是L_1和L_2，間距為d，線膨脹係數分別為 a 和 $-b$，而 a 和 b 都是正數且不隨溫度改變。若儀器工作溫度T的範圍是在低溫 T_L和高溫T_H之間，即$T_H > T > T_L$，則$T_H =$ (20)＿＿，$T_L =$ ＿(21)＿＿。

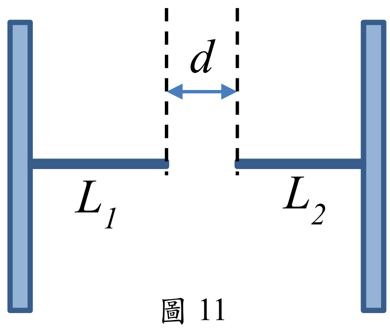


圖 11

十七、　一個用來測重力常數 G 的實驗裝置示意圖如圖 12，由一根細線懸吊一個水平的橫桿及橫桿末端的兩顆小球所構成，細線及橫桿的質量可忽略，小球質量皆為 $m = 5.0$ g，球心距離細線皆為 $r = 10$ cm，且小球尺寸遠小於 r。此一扭擺的水平轉動角度隨時間 t 的變化如圖 13，顯示扭擺微幅的來回擺動，自然擺動週期 T 約為 100 秒。當兩顆質量皆為 $M = 400$ g 的大球在時間 $t \approx 300$ s 時從遠處靠近小球側邊時，大球球心到小球球心的距離為 $d = 2$ cm，方向與橫桿垂直。因大球 M 對小球 m 施加的重力，使扭擺偏轉了大約 $2\times 10^{-4}\ rad$。

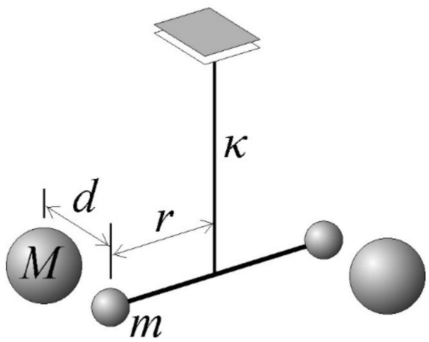


圖 12

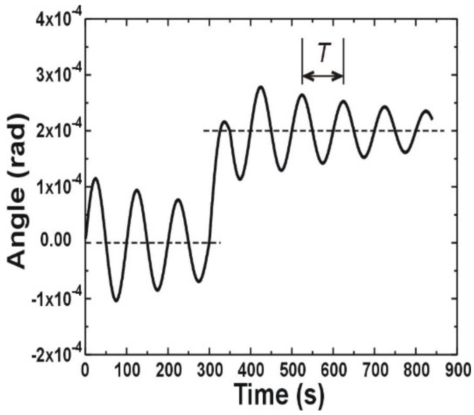


圖 13

(a) 扭擺受到的力矩τ與偏轉角度θ的關係可表示為$\tau = \kappa\theta$，其中κ為細線的扭擺力常數，試求 $\kappa =$＿＿(22)＿＿。(以 Nm/rad 為單位)

(b) 從偏轉的平衡角度變化，試求重力常數 G = ＿＿(23)＿＿。(以 Nm^2/kg^2 為單位)

十八、　有一卡車載運一半徑 $R = 1.0$ m，質量$M = 1.0 \times 10^3$ kg的實心球，球與載貨區地板靜摩擦係數為$\mu_s = 0.4$。卡車司機粗心地未將球固定，也沒有把卡車後的板子豎起。若卡車由靜止以等加速度 a 啟動，卡車上的實心球會滾動，但並未滑動。

取重力加速度$g = 9.8$ m/s^2 ，實心圓球繞其質心的轉動慣量$I = \frac{2}{5}MR^2$。

試問卡車加速度a可允許的最大值為 ＿＿(24)＿＿m/s^2。

十九、 兩個小行星受重力作用而繞行。假設其質量分別為 M 與 m，且 $M \gg m$。若 m以正圓軌跡繞行M，繞行週期為 700 分鐘，繞行半徑為 1000 公尺；

(a) 若一個質量為 m'的物體與 m 正面對撞，並使繞行週期變為 690 分鐘。(b) 此時的橢圓軌道半長軸 a =為___(25)___。

(b) 接續上題，若 $m' = 500\ \mathrm{kg}$，速率約為 $6600\ \mathrm{m/s}$，假設相撞過程為完全非彈性碰撞，無質量噴濺離開小行星；則(c)小行星 m 的質量等於___(26)___。

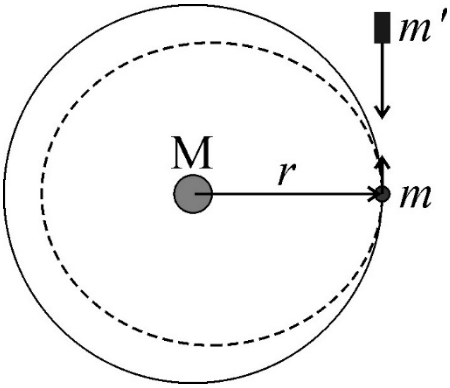


圖 14

【註】: 若m 以橢圓軌道運動，則其在軌道運行速率$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$，其中$r$為$m$與$M$ 之間的距離。

二十、 如圖 15 所示，以$\hat{\imath}$與$\hat{\jmath}$分別代表水平與垂直方向的單位向量。考慮一個重量可忽略的水平圓錐形噴嘴管，其左端入口 A 的截面積為S_{A}，經由流管(虛線部分)接到供水馬達，而右端出水口 B 的截面積為S_{B}，通過流量開關 T 與大氣連通。已知大氣壓力固定為p_0，而水可視為理想流體，密度固定為ρ，噴嘴管內水的重量為$-mg\hat{\jmath}$。

(a) 最初開關 T 封閉、AB 段噴嘴管內充滿靜止的水時，入口 A 處的液壓$p_{\mathrm{i}} = p_0$，則為了使 AB 段噴嘴管(含開關 T)保持靜止，除了管內水的液壓作用力之外，其餘作用於噴嘴管的外力之合力$\vec{F}$為何？___(27)___（以題本所述之物理量符號及$\hat{\imath}$與$\hat{\jmath}$表示力向量）。

(b) 打開 T 後等到水流穩定時，A 處的流速為v_{A}、液壓為$p_{\mathrm{i}} > p_0$，且水充滿噴嘴管內形成穩流，並以流速v_{B}由出水口 B 穩定排放。若不假設白努利定理一定成立，則為了使 AB 段噴嘴管(含開關 T)保持靜止，除了管內水的液壓作用力之外，其餘作用於噴嘴管的外力之合力$\vec{F}'$為何？___(28)___（答案以p_{i}、p_0、ρv_{A}^2、ρv_{B}^2、$S_{\mathrm{A}}\hat{\imath}$、$S_{\mathrm{B}}\hat{\imath}$、$mg\hat{\jmath}$表示）。

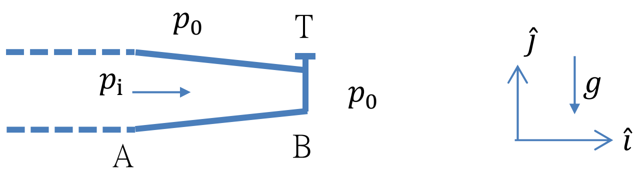


圖 15

二十一、　　一根長度為L的均質細棒以一端甲為旋轉支點，受一外力自水平以等角速率依順時針方向旋轉，如圖 16。旋轉至某一角度θ時，該外力突然消失且細棒的中分點乙處突然斷開，在斷開的過程中，細棒的上下兩截間沒有交互作用力。此後其上半截在相對於該截的質心以順時針方向旋轉了半圈後，其一端 (即斷開瞬間時的丙點) 恰好接觸到地面的支點甲，在這個過程中，細棒的上下兩截並無接觸。重力加速度為g。

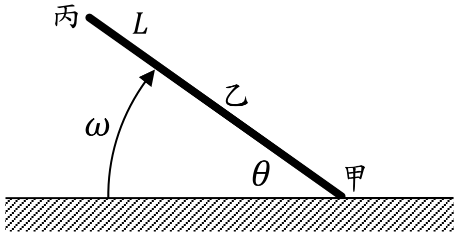


圖 16

試問細棒在斷開時與水平的夾角θ為___(29)___。

二十二、　　考慮由質量分別為M與m的分子與離子沿x軸均勻分布所組成的一維氣體系統。每個離子受到一個沿x軸的外力$F = qE$ (q與E為正值常數，q為離子的電荷)，此外力並非很強，以致各離子的熱運動不受影響，但會在其作用下進行飄移運動，令$\bar{v}$代表離子的平均飄移速率。假設此系統的熱運動適用氣體動力論，離子的數目遠小於分子的數目，且每個離子在發生碰撞後的自由徑(即到下一次碰撞之前行進的距離)至少為L的機率為$P(L) = e^{-L/\lambda}$，其中λ為平均自由徑；換言之，離子自由徑在L到$L + dL$的機率等於$P(L) - P(L + dL) = -dP$。假設$M \gg m$，且離子發生的碰撞都為完全非彈性碰撞，以致碰撞後飄移速率變為零，則比值$\bar{v}/E$ (稱為遷移率)為

____(30)____。

貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、行星逆行

為簡化計算，假設地球與水星繞行太陽的軌道皆為圓軌道，且在同一個平面上。若水星的軌道半徑與地球的軌道半徑比值為α_0，且$t=0$時，太陽、水星與地球三個球體的中心連成一條直線，見右圖上的實心黑球，且定義此時地球指向太陽的方向為x軸正向，如圖 17 所示。若地球繞太陽的角頻率為ω，定義水星相對於地球的位置向量與x軸正向的夾角為$\phi(t)$，

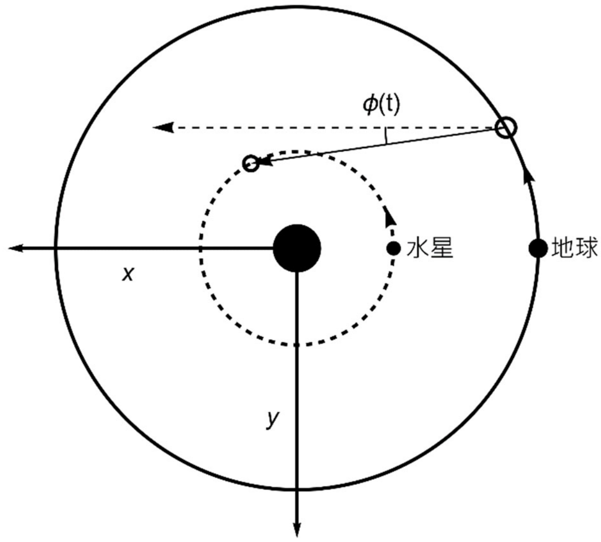


圖 17

(a) 求$\tan\phi(t)$（以α_0,ω及t的函數表示之）

在$\phi(t)$隨時間t遞減的這段期間內，這就是所謂的水星逆行。

(b) 已知$\alpha_0\approx 0.39$。若零時刻附近，水星在$[-t_0,t_0]$這段時間內會呈現逆行，求t_0。

二、如圖 18 所示，一密度為ρ ($\rho < 1$)、半徑為 R 之均勻小球浮在水面上達靜態平衡之通過球心的橫剖面。設鉛直方向為 z 軸，水的表面張力為γ，已知 O 點為球心，C 與 C'點為球面與水接觸面邊緣與橫剖面相交的二點，且水面在這一點之切線與水平(x軸)之夾角為θ，則

(a) 小球的淨重(即真實重量扣除浮力)為何？

(b) 接上題，設球面與水接觸面與邊緣CC'間之小球部分(稱為球冠)的體積為υ，已知

$$\upsilon = \frac{2\pi R^3}{3}(1-\cos\phi) - \frac{\pi R^3}{3}\sin^2\phi\cos\phi$$

且$\phi = \theta = \pi/3$，試問小球陷入水中的深度h與R之比，即 $\frac{h}{R} = ?$

(以ρ、γ以及重力加速度g表示之)。

(c) 接上題，已知水面變形之曲面在橫剖面中的曲線Γ可以方程式描述：

$$z(x) = -L_c \tan\theta\, e^{-(x-x_c)/L_c}$$

其中x_c、z_c為C點的x與z的座標，L_c為毛細作用有效長度。今有兩一樣的小球浮在水面上，假設兩小球所造成之水面變形沿鉛直方向的位移為各小球所造成之變形沿鉛直方向的位移和，且忽略角度ϕ與θ的改變，則當球心相距L時，試估算兩球之間沿連心方向(即水平方向)的作用力。

(以R、γ、θ、ϕ、L_c與x_c表示以及±表示斥力或吸引力)。

提示：可考慮與小球淨重有關的位能改變。

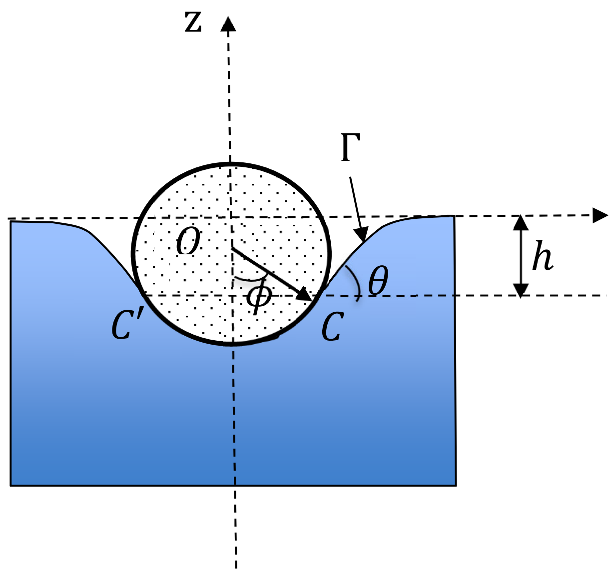


圖 18

公佈日期:111/12/8

2023 年第 23 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 53 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試參考解答

壹、 選擇填充混合題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、
參考解答：(1) 2.5

二、
參考解答：(2) (B)

三、
參考解答：(3) (B)

四、
參考解答：(4) (D)

五、
參考解答：(5) $2g$ 朝下　　(6) (C)

六、
參考解答：(7) (A)

七、
參考解答：(8) (A)

八、
參考解答：(9) 3×10^{-3}

九、
參考解答：(10) 0 ，(11) 5.8

十、
參考解答：(12) $m\left[\dfrac{MV_0}{M+m}\right]^2$

十一、

參考解答：(13) $\sqrt{\frac{4k}{3m}}$

十二、

參考解答：(14) $T_{\mathrm{f}}=\frac{(P_1V_1+P_2V_2)}{(n_1+n_2)R}$ ， (15) (B)

十三、

參考解答：(16) ω^2x ， (17) $\frac{M\omega^2}{2RT}$

十四、

參考解答：(18) $\frac{6v}{13d}$

十五、

參考解答：(19) $\frac{3}{2}$

十六、

參考解答：(20) $T_H=\frac{(L_1a-L_2b)T_0+d}{(L_1a-L_2b)}$ ， (21) $T_L=\frac{d+(L_1a-L_2b)T_0}{L_1a-L_2b}$

十七、

參考解答：(22) 3.95×10^{-7} ， (23) 7.9×10^{-11}

十八、

參考解答：(24) $13.72\ \mathrm{m/s^2}$

十九、

參考解答：(25) 990.5 ， (26) 4.6×10^{9}

二十、

參考解答：(27)$-p_0 S_{\mathrm{A}} \hat{\imath} + mg\hat{\jmath}$，(28)$(p_0 + \rho v_{\mathrm{B}}^2) S_{\mathrm{B}} \hat{\imath} - (p_{\mathrm{i}} + \rho v_{\mathrm{A}}^2) S_{\mathrm{A}} \hat{\imath} + mg\hat{\jmath}$

二十一、

參考解答：(29)$tan^{-1}\dfrac{2}{3\pi} \approx 0.21\ \mathrm{rad} \approx 12°$

二十二、

參考解答：(30)$\sqrt{\dfrac{\pi\lambda q}{2mE}}$

貳、計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

第一題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 5 分	寫出地球軌道參數式 $\vec{r}_E(t) = -R\{\cos(\omega t)\,\hat{x} + \sin(\omega t)\,\hat{y}\}$	1	
	寫出水星軌道參數式 $\vec{r}_M(t) = -\alpha_0 R\{\cos\left(\alpha_0^{-3/2}\omega t\right)\hat{x} + \sin\left(\alpha_0^{-3/2}\omega t\right)\hat{y}\ \}$	2	
	得出正確 $\tan\phi(t) = \frac{\alpha_0\sin\left(\alpha_0^{-3/2}\omega t\right)-\sin(\omega t)}{\alpha_0\cos\left(\alpha_0^{-3/2}\omega t\right)-\cos(\omega t)}$	2	
(b) 10 分	寫出 $\tan\phi(t) \approx \frac{\alpha_0^{-1/2}\omega t\left(1-\frac{1}{6}\alpha_0^{-3}\omega^2 t^2\right)-\omega t\left(1-\frac{1}{6}\omega^2 t^2\right)}{\alpha_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha_0^{-3}\omega^2 t^2\right)-\left(1-\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right)}$	2	少 $\frac{1}{6}\alpha_0^{-3}\omega^2 t^2$ 和 $\frac{1}{6}\omega^2 t^2$ 不扣分 (因為是以$\sin x \approx x$展開)
	寫出 $\tan\phi(t) \approx -\frac{\omega t}{(1-\alpha_0)}\left\{\left(\alpha_0^{-1/2}-1\right)+\left[-\frac{\left(\alpha_0^{-7/2}-1\right)}{6}-\frac{\left(\alpha_0^{-1/2}-1\right)\left(\alpha_0^{-2}+\alpha_0^{-1}\right)}{2}\right]\omega^2 t^2\right\}$	2	少 $\frac{\left(\alpha_0^{-7/2}-1\right)}{6}$ 不扣分 (理由同上)
	計算 $\dot{\phi}(t) \propto \left(\alpha_0^{-1/2}-1\right) - \left[\frac{\left(\alpha_0^{-7/2}-1\right)}{2}+\frac{3\left(\alpha_0^{-1/2}-1\right)\left(\alpha_0^{-2}+\alpha_0^{-1}\right)}{2}\right]\omega^2 t^2$	2	少 $\frac{\left(\alpha_0^{-7/2}-1\right)}{2}$ 不扣分 (理由同上)
	得出 $\omega t_0 = \sqrt{\frac{2\left(\alpha_0^{-1/2}-1\right)}{\left[\left(\alpha_0^{-7/2}-1\right)+3\left(\alpha_0^{-1/2}-1\right)\left(\alpha_0^{-2}+\alpha_0^{-1}\right)\right]}}$	2	少 $\alpha_0^{-7/2}-1$ 不扣分 (理由同上)
	得到正確數值 $t_0 \approx 0.027$ 年	2	得到數值為 0.043 年不扣分

*若僅發生其中一小部分錯誤，之後的過程皆對，請勿重複扣分(double penalty)。

第二題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(a) 3 分	寫出淨重 $2\pi R\gamma\sin\theta\sin\phi$	3	
(b) 6 分	寫出小球所受的浮力 $vg+\pi(R\sin\phi)^2hg$	3	1)僅寫 浮力≈ vg 或 $\approx\pi(R\sin\phi)^2hg$ → 得 1 分
	寫出力平衡淨重式子: $\frac{4\pi R^3}{3}\rho g-\pi gR^3\left(\frac{3}{4}\frac{h}{R}+\frac{5}{24}\right)=\frac{3}{2}\pi R\gamma$	1	
	得出 $\frac{h}{R}=\frac{16}{9}\rho-\frac{5}{18}-\frac{2\gamma}{R^2g}$	2	
(c) 6 分	寫出 $U=2\pi R\gamma\sin\theta\sin\phi\, z(L)=$ $-\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi R\gamma L_c e^{-(L-x_c)/L_c}$	2	
	寫出 $F=-\frac{dU}{dL}$	2	
	得到正確 $F=-\frac{dU}{dL}=-\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi R\gamma e^{-(L-x_c)/L_c}$	2	

*若僅發生其中一小部分錯誤，之後的過程皆對，請勿重複扣分(double penalty)。