2023年第23屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第53屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2023 年 2 月 11 日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

一、限使用黑色或藍色原子筆作答。

二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。

三、各計算題請在答案卷上指定頁面的**正面**作答，每大題答案卷二頁。

四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t為時間，x為任意物理量)

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ ， $f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$;

$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$ ， $\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$ 。

2. $\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma\cdot(ax+b)^{m-1}$; $\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = a\cdot(ax+b)^{-1}$;

$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$; $\frac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)$; $\frac{d\cos(ax)}{dx} = -a\sin(ax)$

3. $\int(ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + \mathrm{C}$， $m \neq -1$; $\int(ax+b)^{-1}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + \mathrm{C}$;

$\int\sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + \mathrm{C}$; $\int\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$，

$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + \mathrm{C}$; $\int\frac{dx}{x} = \ln x + C$。(在此，C 為一個常數)

4. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ ， $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

5. 當$|x| \ll 1$， $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$ ， $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ ， $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots$ 。

2023年第23屆亞洲物理及第53屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、 液體折射率的測量

已知空氣的折射率約等於 1，設液體的折射率為n_l>1；以下討論液體折射率測量的幾種方法。

(A) 用薄框的等邊三角形透明容器盛裝滿液體。當以入射角為$60°$的單色光，入射容器一側，並由另一側穿出，且造成光線偏折了δ的角度，如圖 1 所示，則此液體的折射率為n_l為何？(9 分)

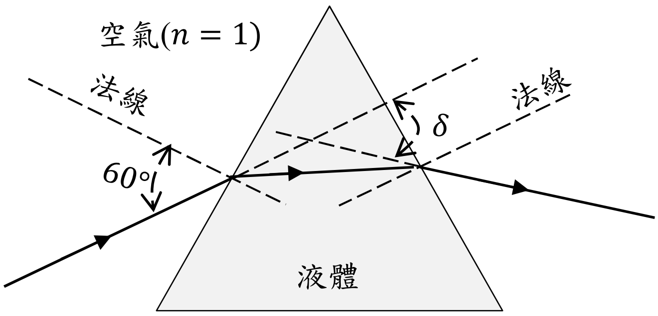

圖 1

(B) 當透明液體的量不多，可用薄膜的方式，將液體夾在兩層玻璃之間進行測量。已知上方玻璃厚度為$5h$；下方玻璃厚度為h，底部是毛玻璃，中央有一透光針孔；單色平行光由針孔入射時，可以視為一個標準的點光源；如圖 2 所示。當由裝置的下方觀測時，在毛玻璃上可以看見兩個同心圓的亮紋，半徑分別為R和r；且$r < R$，且光的強度如圖 3 所示。已知玻璃的折射率 n_g大於 n_l，液膜厚度相較於h可以忽略不計，且不考慮針孔繞射，求n_l。(以r、R和h表示之)。(8 分)

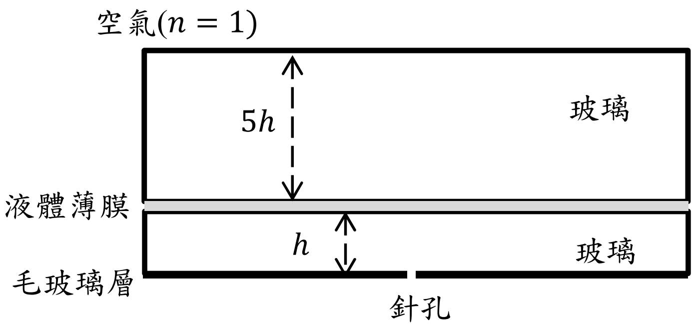

圖 2

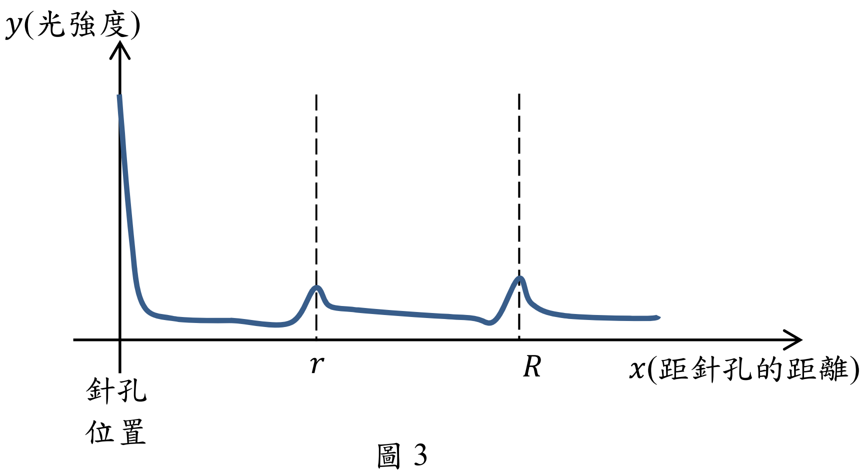

圖 3

(C) 利用麥克森干涉儀測量透明液體折射率裝置如圖 4 所示；其中 BS 為半穿透半反射玻片；M_1為固定的反射鏡，M_2是可以前後微調移動的反射鏡，D 是薄長方形的容器，其厚度為d；用以盛裝液體。將單一波長的微波光束照射到 BS 會分成兩束，一束經$90°$反射到M_1折返，在穿透 BS 後進入微波強度偵測器。另一束通過 D 容器，照到M_2折返，再經過 D 後由 BS 反射入微波強度偵測器。微波強度偵測器可測得兩束光干涉後的強度。在進行實驗時，首先須微調M_2使得光偵測器測得的微波強度最弱，接著將液體注入 D。若此時將M_2緩慢向前移，當移動$\Delta\ell$距離時，微波強度偵測器恰好第一次測得強度最弱，且d小於微波波長，則液體的折射率 n_l為何？(8 分)

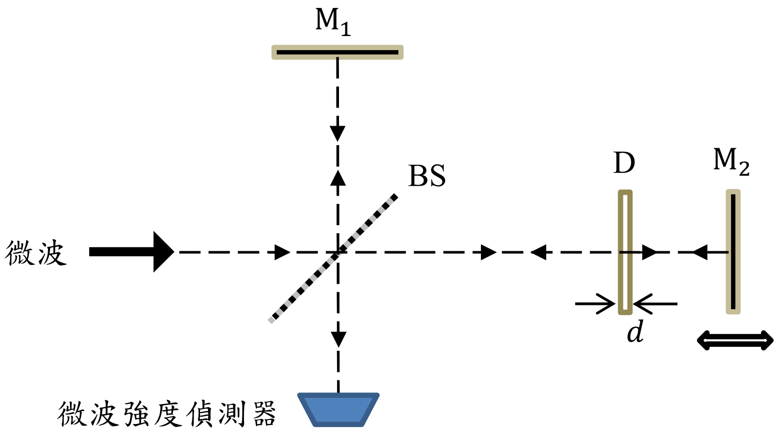

圖 4

二、太空艙返回地球

考慮一太空艙（質量為 m，底面積為 A）以入射速度為 $\vec{v}$，入射角度為 ϕ，返回地球，如圖 5 所示，並假設太空艙僅在 x-z 平面上運動。

(A) 太空艙所受的空氣阻力 $\overrightarrow{F_d}$ 可視為於Δt 內降下所排開空氣的動量變化，假設空氣密度為 ρ，運動速率遠小於太空艙落下的速率，被排開後的空氣分子速度同為$\vec{v}$，由此所造成的空氣阻力可表為

$$\overrightarrow{F_d} = -\alpha v^{\beta}\,\hat{v} \qquad (1)$$

求 α 與 β。（以數字或題目所給的物理量符號表示）(6 分)

(B) 寫下太空艙平行於地面($\hat{x}$)與垂直於地面($\hat{z}$)方向的受力方程式。(以 v、m 、ϕ 與式(1)中物理參數表示)。 (6 分)

(C) 考慮一簡化的模型：太空艙在高軌道上(高度為 z)，進入大氣層時，空氣密度 $\rho(z) = \rho_s exp(-\frac{z}{H})$，此處$\rho_s$ 為地表空氣密度，H 為一參數，壓力隨高度的變化可表示為 $\frac{dp}{dz} = -\rho g$。此時假設太空艙所受重力可忽略，即 $v_z = -v\cos\phi$，考慮初始條件 t (=0) 到 t+dt 時，太空艙由 z 到$z+dz$，$v(t=0)=v_0$，$z(t=0)=z$，大氣壓力變化 $p(z)-p(z+dz)=\Delta p(z)$。求 v 與 $\Delta p(z)$ 的關係。(5 分)

(D) 考慮太空艙 m = 2500 Kg，A= 14.5 m^2，初速 v_0 = 7 km/s， ϕ = 60°， g = 9.8 m/s^2， 進入大氣層$\Delta p(z)$ = 10^3 Pa，求太空艙速度值 v。(3 分)

由(D)可知太空艙速度遠大於安全著陸速度，要避免太空艙速度過快墜毀，必需降低太空艙返回速度 v，其中一種降速的方法即增加 ϕ，但 ϕ 愈接近 π/2, 太空艙會以高速低掠角自大氣層彈回至太空。另一種降速的方法是用降落傘減速。

(E) 現假設降落傘截面積為 A_p，於適當高度展開，此時空氣密度 ρ，考慮 ϕ= 0°，求太空艙的終端速度 v_T。(5 分)

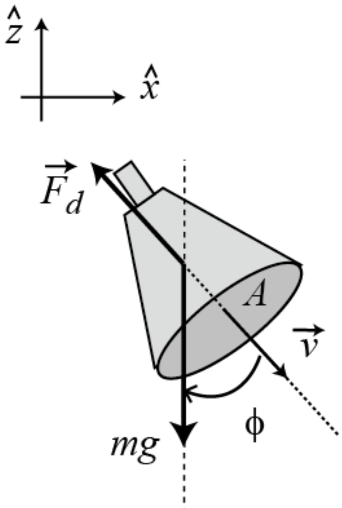

圖 5

三、

一密閉絕熱容器，以絕熱活塞間隔為 A、B、C 三等份，活塞體積可忽略，如圖 6。在兩活塞皆固定不動的狀態下，A、B、C 三腔均封存有相同的單原子分子理想氣體（$\gamma = 5/3$），各自的溫度皆為 T，體積皆為 V，但莫耳數分別為 1、32、及 243。今依步驟進行以下操作，且假設除了最後將活塞抽去前的所有過程均為可逆，過程中沒有氣體漏出，活塞之摩擦力亦可忽略，系統始終保持絕熱。

(A) 首先兩活塞由靜止釋放，使其可以自由左右移動。當兩活塞停止移動達平衡時，求 A、B、C 三腔的溫度比。(9 分)

(B) 今以外力將左活塞慢慢推至容器的正中央，使 A 腔的體積變為$3V/2$，而右活塞仍保持自由移動。當右活塞達靜止平衡時，求 B 腔的壓力。(8 分)

(C) 此時再將兩絕熱活塞抽去，使三腔相通，求最後達成熱平衡時的溫度。(8 分)

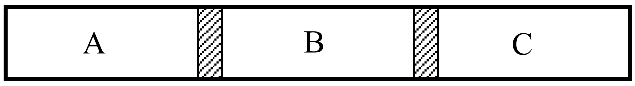

圖 6

四、神經元的外壁彈性膜

如圖 7 所示，神經元(neuron)的外壁為一彈性膜(membrane)，該膜的功能類似一彈簧，可以抗壓縮。假設彈性膜的內外表面積均為 A，可視為一平面(即可忽略其曲率)，且其等效力常數為 k，電容率為 ε，平衡時厚度為 d_0。神經元中有所謂「離子泵 (ion pumps)」可將離子注入彈性膜中，使彈性膜的外表面和內表面分別均勻佈滿正、負離子(如圖 7 所示)。

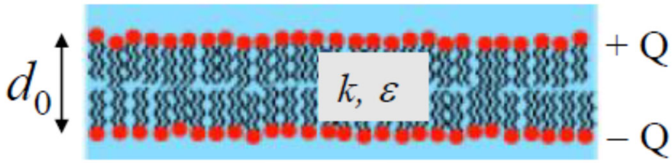

圖 7

(A) 在離子泵作功一段時間後，彈性膜的外表面和內表面均勻分佈有$+Q$和$-Q$ 的電荷，試計算此時彈性膜的厚度 d 為何？ (以題目給的參數表示。) (5 分)

(B) 承(A)小題，此時彈性膜內、外表面的電位差ΔV 為何？ (以題目給的參數表示。)？(5 分)

(C) 假設離子泵係從 $Q = 0$ 狀態開始緩慢地(準靜態)將彈性膜充電，而且在彈性膜內、外表面的電位差大於一特定值 V_{th} 時，離子泵會自動關閉。問該彈性膜的力常數 k 最小值須為若干，方可使彈性膜不至於在離子泵關閉前塌陷(當內外表面重合時，此彈性膜即崩塌)。 (以題目給的參數及 V_{th} 表示)(5 分)

(D) 若彈性膜力常數 k 僅略大於(C)小題所得的值，亦即離子泵會在彈性膜內、外表面的電位差達到最大值瞬間關閉，問此時離子泵所作的功為何？ (以 k 和 d_0 表示)(5 分)

(E) 如果彈性膜力常數 k 僅略小於(C)小題所得的值，則離子泵所作的功為何？ (以 k 和 d_0 表示) (5 分)

五、鏡像法與其應用

鏡像法為求電荷在金屬上感應電荷常用的方法，以圖 8 所示為例，若將金屬接地，將金屬表面視為無限大平面，則位於$x = a$之點電荷q在$x > 0$之區域所產生的電場為點電荷q與其位於$x = -a$之鏡像電荷$-q$所產生之電場總和，我們可以容易地看出其中點電荷q與鏡像電荷$-q$產生的總位能在$x = 0$處為0，滿足金屬接地的設定。試回答以下問題：

(A) (i) 試求金屬表面的電荷密度$\sigma(y)$。(3 分)

(ii) 設電荷在$x = \infty$時電位能為零，試求電荷位於$x = a$時之電位能U。(4 分)

(B) 如圖 9 所示，考慮一接地、有一夾角為α之金屬表面角落內的電場，若$\alpha = \pi/2$，

(i) 試求位於(x, y)之點電荷q之受力$\vec{F}$。(3 分)

(ii) 設電荷在$x = y = \infty$時電位能為零，則電荷位於(x, y)的電位能為何？(4 分)

(C) 將(B)推廣到$\alpha = \pi/n$，其中$n = 2,3,4,5, \ldots$。設點電荷q位於A點，且距原點(角落頂點O點)之距離為R，$\overrightarrow{OA}$與x軸之夾角為β，

(i) 試求所有鏡像電荷與x軸之夾角以及所對應的電荷值。(4 分)

(ii) 若令鏡像電荷為q_i、位置為$\vec{r}_i$，其中$i = 2,3,4,5, \ldots, 2n$，真實的點電荷q與其位置定為$i = 1$，則點電荷q的電位能U可以用所有電荷間的交互作用之電位能表示，此表示式為何？(3 分) (以$\vec{r}_i$、n與對i求和等表示) ，並試將此點電荷q的電位能U簡化為以α與β相關的級數和表示。(4 分)

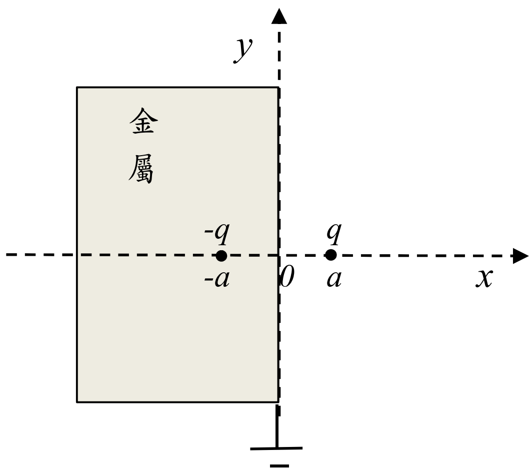

圖 8

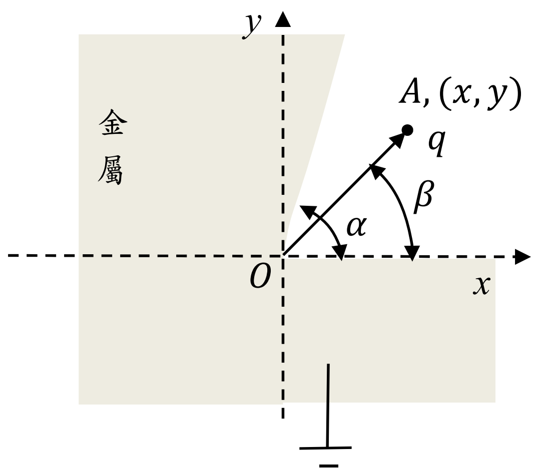

圖 9

六、

一個楊氏係數（即伸張彈性模量）為Y的均勻細長柱體，靜置於水平的光滑平面上，其縱軸沿x方向，自然長度為L，橫截面積為A，質量為$m' = AL\rho$ (ρ為密度)。如圖 10 所示，當柱體受到擾動時，在平衡態下座標為 x 的介質部分會沿 x 方向出現微幅位移$\xi(x)$，若以F代表在x處的介質所受到的拉力（向右為正），則

$$F = YA\left(\frac{d\xi}{dx}\right) \tag{1}$$

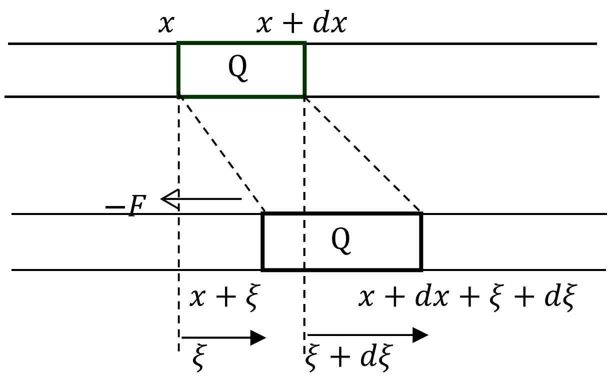

圖 10

(A) 將此柱體視為彈簧時，其力常數k為何？(7 分)

(B) 考慮此柱體中，波前平行於yz平面(即波為平面波)的縱波，波速u為何？(6 分)

(C) 若柱體左、右端分別連接著質量為m與M的質點，則柱體中角頻率為ω的駐波諧振盪(注：諧振盪是指隨時間以正弦或餘弦函數變化的週期性振盪)，須滿足以下條件：

$$\frac{m'}{\left[1 - \frac{m'^2}{mM\theta^2}\right]} = f(\theta), \quad \theta \equiv \frac{\omega L}{u} \tag{2}$$

試求出函數$f(\theta)$。(5 分)

(D) 若以μ代表約化質量$mM/(m + M)$，試證明以m'為微小量並展開至其一階時，以下的關係成立：(3 分)

$$\frac{m'}{\theta^2} = \mu + m'\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu}{m + M}\right) = \mu + \frac{m'}{3}\frac{m^2 + M^2 - mM}{(m + M)^2} \tag{3}$$

(E) 承上(C)題，當柱體－雙質點(m、M)系統做駐波諧振盪時，系統質心是否不動？試證明之。(4 分)

數學附錄：當$\theta \ll 1$ 時，$\cot\theta \approx 1/\theta - \theta/3 + \cdots$ 。

2023 年物理奧林匹亞複選 公佈日期:112/2/13

第 1 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 9 分	寫出 $n_l \sin\angle 2 = \sin\delta$	2	方法均正確,答案錯誤，可得 5 分。
	寫出 $\sin 60 = n_l \sin 60 \cos\angle 2 - n_l \cos 60 \sin\angle 2$	2	
	寫出正確 $n_l = \sqrt{\left(1 + \frac{\sin\delta}{\sqrt{3}}\right)^2 + \sin^2\delta}$	5	
(B) 8 分	寫出正確 $n_g \sin\theta_R = 1$ ， $n_g \sin\theta_r = n_l$	2	方法均正確,答案錯誤，可得 4 分
	寫出正確 $n_l = \frac{r}{R} \cdot \frac{\sqrt{144h^2 + R^2}}{\sqrt{4h^2 + r^2}}$	6	
(C) 8 分	寫出正確 $n_l = \frac{\Delta\ell}{d} + 1$	8	方法均正確,答案錯誤，可得 4 分

第 2 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 6 分	寫出 $\Delta p_{air} = \rho A v^2 \Delta t$	2	
	正確得出 $\overrightarrow{F_d} = -\rho A v^2\,\hat{v}$ $\alpha = \rho A$ 與 $\beta = 2$	4	
(B) 6 分	正確寫出 $\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = -\rho A v^2 \sin\phi \\ m\frac{dv_z}{dt} = -mg + \rho A v^2 \cos\phi \end{cases}$	6	正負號錯誤得 2 分
(C) 5 分	正確得出 $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{\rho_s A v^2}{m}\exp(-z/H) & (3.1) \\ \frac{dz}{dt} = -v\cos\phi & (3.2) \end{cases}$	2	
	得出 $\frac{dv}{dz} = \frac{\rho_s A v}{m\cos\phi}\exp(-z/H)$	2	
	正確寫出 $v = v_0 \exp(-\frac{A}{mg\cos\phi}\Delta p)$	1	
(D) 3 分	正確得到 $v = 2.14$ km/s	3	
(E) 5 分	正確寫出 $m\frac{dv}{dt} = -mg + \rho A_p v^2$	2	
	正確得到 $v_T = \sqrt{\frac{mg}{\rho A_p}}$	3	

第 3 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 9 分	寫出 $TV^{2/3} = $ 常數	2	
	得出 $V'_A : V'_B : V'_C = 1 : 2^3 : 3^3$	2	
	得出 $T'_A : T'_B : T'_C = 36 : 9 : 4$	5	
(B) 8 分	寫出 $$V''_B : V''_C = V'_B : V'_C = 8 : 27$$ 或 $$V''_B = 12V/35$$	4	
	得出 $$P''_B = \left(\frac{70}{3}\right)^{5/3} \frac{RT}{V}$$	4	
(C) 8 分	(i) 寫出: $$\frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}PV \propto V^{-2/3}$$	2	
	(ii) 寫出 $T_f = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2/3} + 32\left(\frac{12}{35}\right)^{-2/3} + 243\left(\frac{81}{70}\right)^{-2/3}}{276} T$	6	

第 4 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	寫出 $E_1 = \frac{Q}{2\epsilon A}$ 或 $F_E = Q \cdot E_1 = \frac{Q^2}{2\epsilon A}$	1	
	得出 $d = d_0 - \frac{Q^2}{2\epsilon Ak}$	4	
(B) 5 分	寫出 $\Delta V = E \cdot d = \frac{Q}{\epsilon A}(d_0 - \frac{Q^2}{2\epsilon Ak})$	5	
(C) 5 分	寫出 $\frac{dV}{dQ} = \frac{d_0}{\epsilon A} - \frac{3Q_{max}^2}{2\epsilon^2 A^2 k} = 0$	2	
	寫出 $\Delta V_{max} = \sqrt{\frac{kd_0^3}{\epsilon A}}(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}} \geq V_{th}$	2	
	得出 $k \geq (\frac{3}{2})^3 \frac{\epsilon A}{d_0^3} V_{th}^2$	1	
(D) 5 分	寫出$\mathrm{W} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{Q^2}{2C}$	1	
	寫出 $\mathrm{W} = \frac{Q^2 d_0}{2\epsilon A} - \frac{Q^4}{8\epsilon^2 A^2 k}$	2	
	寫出 $\mathrm{W} = \frac{5}{18}kd_0^2$	2	
(E) 5 分	寫出 $\mathrm{W} = \frac{1}{2}kd_0^2$	5	有“離子泵會繼續作功直到彈性膜崩塌為止“的概念可得 1 分。

第 5 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) (i) 3 分	$\vec{E}=(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},0)$	1	若分母有 z^2 也正確
	得出 $\sigma(y)=\varepsilon_0\vec{E}\cdot\hat{n}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	2	
(A) (ii) 4 分	寫出 $$U=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4a}$$	4	
(B) (i) 3 分	得出 $\vec{F}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{x^2},\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{y^2}\right)$	3	
(B) (ii) 4 分	寫出 $\vec{F}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y}\right)$	1	
	得到 $U=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),r=\sqrt{x^2+y^2}$	3	
(C) (i) 4 分	寫出鏡像電荷 q之角度為$2\alpha+\beta$、$4\alpha+\beta$、$6\alpha+\beta\ldots2(n-1)\alpha+\beta$，	2	
	寫出鏡像電荷$-q$之角度為$2\alpha-\beta$、$4\alpha-\beta$、$6\alpha-\beta\ldots2n\alpha-\beta$	2	
(C) (ii) 7 分	寫出 $U=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{i=2n}\sum_{j=i+1}^{j=2n}\frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0\lvert\vec{r}_i-\vec{r}_j\rvert}$	3	
	寫出 $U=\frac{1}{2}q\sum_{j=2}^{j=2n}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0\lvert\vec{r}_1-\vec{r}_j\rvert}$	2	
	寫出 $U=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0R}\left[\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin2\alpha}+\cdots\frac{1}{\sin(n-1)\alpha}\right]-$ $\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0R}\left[\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)}+\frac{1}{\sin(2\alpha-\beta)}+\cdots\frac{1}{\sin(n\alpha-\beta)}\right]$	2	

第 6 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 7 分	寫出 $Fdx = YAd\xi$	2	
	寫出 $FL = YA[\xi(L) - \xi(0)]$	2	
	寫出 $\Delta L = \xi(L) - \xi(0)$	1	
	得出 $k = \frac{YA}{L}$	2	
(B) 6 分	寫出 $dF = \rho A dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$	2	
	寫出 $dF = YA\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)dx$	2	
	得出 $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$	2	無推導給 1 分
(C) 5 分	得出 $\xi(x,t) = \xi(x)\sin 2\pi f t =$ $$\left(C\cos\frac{2\pi f x}{u} + D\sin\frac{2\pi x}{u}\right)\sin(2\pi f t)$$	2	
	得出 $$\frac{m'}{\mu\left[1 - \frac{m'^2}{mM}\left(\frac{u}{\omega L}\right)^2\right]} = \frac{\omega L}{u}\tan\frac{\omega L}{u}$$	2	
	正確找出 $f(\theta) = \mu\,\theta\tan\theta$	1	
(D) 3 分	正確推得 $$\frac{m'}{\theta^2} = \mu + m'\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu}{m+M}\right)$$ $$= \mu + \frac{m'}{3}\frac{m^2 + M^2 - mM}{(m+M)^2}$$	3	可由題目所給的(2)式開始推導
(E) 4 分	考慮質心座標的位移為 $$\Delta X \sin\omega t$$ 寫出 $$(m + M + m')\Delta X$$ $$= \int_0^L \xi(x)\rho A dx + m\xi(0) + M\xi(L)$$	2	
	得出 $\Delta X = 0$	2	