2024 年第 24 屆亞洲物理奧林匹亞競賽及
第 54 屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2023 年 11 月 4 日

13：30~16：30

考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

1、本試題包括選擇填充混合題三十格及計算題兩大題，合計總分為 150 分。
2、選擇填充混合題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
3、計算題部分，請在答案卷指定之位置作答。
4、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。
5、限以藍色或黑色原子筆作答。

常用到的數學公式(t為時間，x為任意物理量) 與 轉動慣量之平行軸定理

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ ， $f''(x) \equiv \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$；

$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$ ， $\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$。

2. $\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}$； $\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1}$；

$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$； $\frac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)$； $\frac{d\cos(ax)}{dx} = -a\sin(ax)$

3. $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + \mathrm{C}$， $m \neq -1$； $\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + \mathrm{C}$；

$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + \mathrm{C}$； $\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$，

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + \mathrm{C}$； $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$。(在此，C 為一個常數)

4. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ ， $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

5. 當$|x| \ll 1$，$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$，

$e^x \approx 1 + x$， $\sin x \approx x$， $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$。

6. $I_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$，$I_0 = \sqrt{\pi}/2$， $I_1 = 1/2$，$I_2 = \sqrt{\pi}/4$

平行軸定理：

設直線L_{CM}通過一剛體的質心，若有一旋轉軸L平行於L_{CM}，則剛體繞此旋轉軸L轉動之轉動慣量 I 可寫為：

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_{CM} + Md^2$$

其中 I_{CM} 為剛體繞質心旋轉軸 L_{CM} 轉動的轉動慣量，M是剛體的質量，d為L與L_{CM}之間的距離。

2024年第24屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第54屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含選擇填充混合題和計算題兩部分，總分為150分，考試時間三小時。

壹、選擇填充混合題(每格4分，共30格，合計120分)

一、在某一電玩射擊遊戲中，場景設計有一射手與壞人分別站立位於剛性光滑牆壁組構的樓層上，射手持槍以45度角朝地面射出一顆子彈，如圖1所示。假設子彈與地面與牆壁為完全彈性碰撞，以下敘述何者為真。

答：＿＿(1)＿＿。

(A) 子彈經反彈後擊中壞人。

(B) 子彈經反彈後擊中射手。

(C) 子彈於樓層間反彈後，沒擊中任何人。

(D) 子彈經反彈後由下樓層空隙飛離，沒擊中任何人。

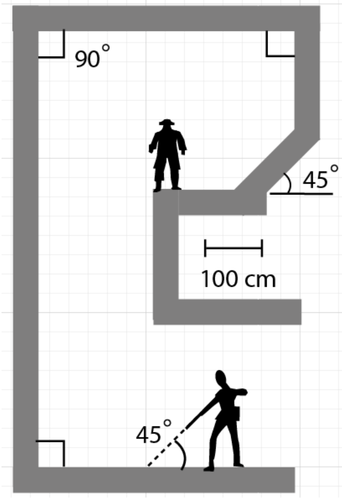

圖1

二、兩相同木塊以三段相同的輕彈簧連接，如圖2所示。兩木塊以相同的方向同步作微小振盪時的週期為T_1；以相反方向振盪時的週期為T_2，則T_1與T_2的大小關係何者正確？答：＿＿(2)＿＿。

(A) $T_1 > T_2$。

(B) $T_1 = T_2$。

(C) $T_1 < T_2$。

(D) 不一定，與彈簧彈力常數k有關。

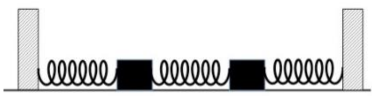

圖2

三、將一根長度為L的均勻細繩沿水平方向略為張緊後，於其兩端施加垂直驅動力，使左端與右端隨時間t分別以$A\cos(\omega t+\phi)$與$A\sin(\omega t+\phi)$沿垂直方向做振幅為A、角頻率為ω的微幅振盪。已知細繩兩端之間出現的橫波為行進波，以波速c由左向右前進，若重力的影響可忽略，則繩子的最短長度L應符合下列何式？

答：＿＿(3)＿＿。

(A) $\frac{\omega}{c}L=\frac{\pi}{4}$　(B) $\frac{\omega}{c}L=\frac{\pi}{2}$　(C) $\frac{\omega}{c}L=\pi$　(D) $\frac{\omega}{c}L=2\pi$

四、水平光滑桌面上放置一個輕質薄墊板，上方靜置一個質量為 m 的正立方均質木塊，初始時整個系統為靜止，如下圖 3，木塊與墊板間的靜摩擦係數為 μ_s 、動摩擦係數為 μ_k ，墊板與桌面間沒有摩擦力，重力加速度為 g。今施以外力將墊板自靜止突然向右拉，拉力始終保持固定。

以下敘述何者正確？答：____(4)____。

(A) 整個過程中力學能守恆。

(B) 整個過程中動量守恆。

(C) 木塊相對於墊板一定會移動。

(D) 木塊相對於桌面一定會移動。

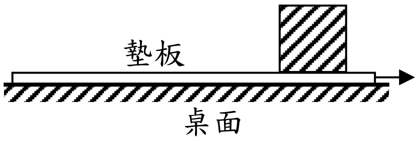

圖 3

五、如圖4所示，水平桌面上有三個相同的線軸，其重量為W，內軸半徑為r，外軸半徑為R。若在線軸的右側施力F垂直向上拉起細線，如圖4實線箭號所示，

(i)下列敘述何者正確？答：____(5)____。

(A) 該線軸會順時針轉動。

(B) 相對於中心軸，施力F對線軸造成的力矩量值為rF。

(C) 該線軸總會受到方向向左的摩擦力。

(D) 若不計施力F，線軸僅受到重力。

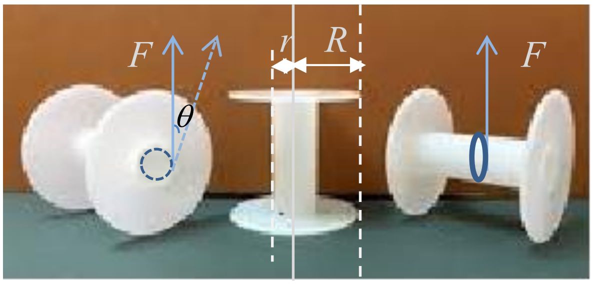

圖 4

(ii)承上題，若發現當施加的力與鉛垂腺夾θ角時，如圖4中虛線箭頭所示，可使該線軸不移動也不轉動，則$\cos\theta=$ ____(6)____。

(以題目中已知物理量表示)。

六、質量為 3kg 與 2kg 的木塊以細繩連接，置於一質量為 1kg，半徑為 5cm 的滑輪兩側，滑輪上方以一彈簧秤固定於天花板，細繩與彈簧秤的質量均可忽略，滑輪可視為一均勻圓盤，如圖 5 所示。在木塊移動期間，細繩在滑輪上無滑動，試問此時彈簧秤上的讀數為

____(7)____kg？

（圓盤繞其質心之轉動慣量為$\frac{1}{2}MR^2$，其中M為質量，R為半徑）

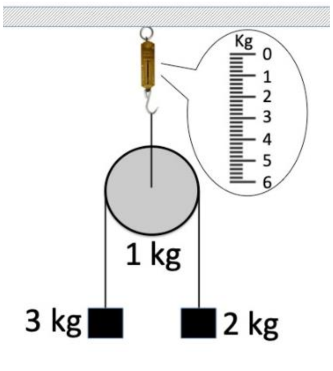

圖 5

七、如圖 6 所示，考慮光滑平面上 A、B 兩個系統間的一維碰撞。A 是質量為m的方塊，初速為v。B 是一個複合系統，包含兩個質量皆為m的方塊，兩方塊以彈性係數為k_1的輕彈簧相連，初始時 B 為靜止。A、B 間的碰撞可視為透過一個彈性係數為k_2的輕彈簧作用。假設這兩個彈簧的長度都夠長，因此在碰撞時不會發生方塊直接撞在

一起的情況。

(i) 若$k_2 \gg k_1$，求碰撞結束後 A 的末速$v_1 =$_____(8)_____；

(ii) 若$k_2 \ll k_1$，求碰撞過程中 A、B 間彈簧(k_2)的最大壓縮量$d_2 =$_____(9)_____。

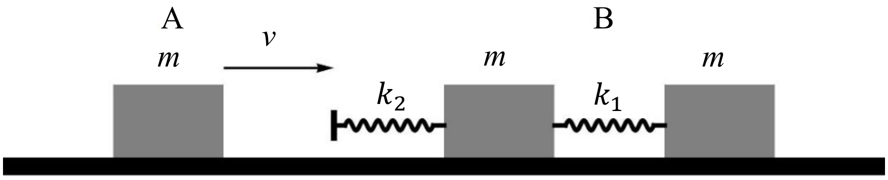

圖 6

八、N個理想氣體分子組成一個封閉系統。已知每一個分子的自由度為f，k_B 是波茲曼常數，系統的絕對溫度為T，U為系統的內能，則$U/T =$ _____(10)_____ (以N、f、k_B表示之)。

當此系統經過一個絕熱過程時，過程中任一個時刻i，其體積 V_i 與 T_i^l 的乘積為一個常數，即$V_iT_i^l =$ 常數；則 $l =$ _____(11)_____。

九、如圖 7 所示，兩彈力常數為k之理想彈簧的一端分別固定在天花板的A與B兩點，另一端同時固定在質量為m之小木塊上。若彈簧的原長為ℓ，且$\overline{AB} = 2\ell$，當小木塊達靜態平衡後，再將小木塊自平衡點向下拉一小段遠小於ℓ之距離釋放，小木塊做簡諧振盪，其振盪的角頻率可寫為$\sqrt{\frac{3k}{m}} \times f$，則 $f =$ _____(12)_____。

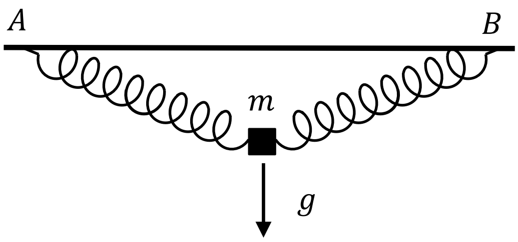

圖 7

十、1970 年代，蘇聯曾經發射一飛行器（火星-2 號）探索火星。該飛行器繞行火星軌道的遠火點和近火點與火星表面的最短距離分別為 $d_1 = 25000\ \mathrm{km}$ 和 $d_2 = 1380\ \mathrm{km}$ 如下圖 8 所示，且其運行週期為 18 小時。已知火星半徑$R_\mathrm{M} = 3400\ \mathrm{km}$，地球半徑$R_\mathrm{E} = 6400\ \mathrm{km}$，地球表面附近的重力加速度$g_\mathrm{E} = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$。

(i)試根據上述數據估計火星質量(M_M)與地球質量(M_E)的比值：$\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{E}} \approx$ ____(13)____。

(ii)承上題，若已知火星表面上的大氣壓力是地球表面上大氣壓力的$\frac{1}{200}$，試估計火星上大氣質量(m_M)與地球上大氣質量(m_E)的比值：$\frac{m_\mathrm{M}}{m_\mathrm{E}} \approx$ ____(14)____。

（提示：火星與地球表面上的大氣層厚度均遠小於二者之半徑，故可假設其所受重力加速度為定值，不隨高度而變。）

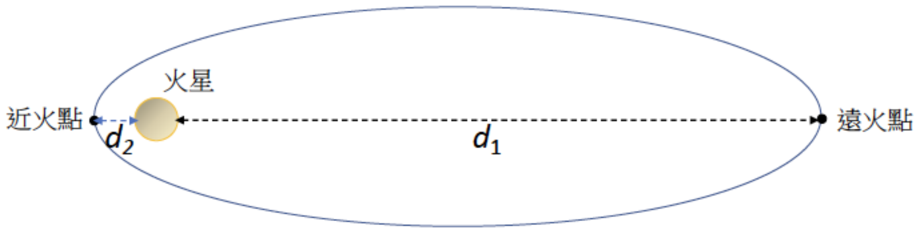

圖 8

十一、一顆溫度為 T_h 的小鉛彈，在往下落的過程中，以對流的方式將熱散失，而使鉛彈的溫度達到較低溫度 T_c。已知在空氣溫度為T_{air}的條件下，每單位時間內對流傳遞的熱能 H 等於

$$H = hA(T - T_{air})$$

其中 h 為對流之傳熱係數，A 為鉛彈表面積，T 為鉛彈的溫度。設鉛彈的密度為 ρ 和比熱為 c 均可視為常數，則直徑為 d 的鉛彈，在下落過程中自$T_h > T_{air}$降溫至$T_c > T_{air}$，需要的時間 t 等於 ____(15)____。

（假設下落過程中，鉛彈內部的溫度都是均勻的，且體積可以近似不變。）

十二、以下考慮一物體的水平一維運動，並忽略重力影響。物體質量為 m，已知在$t = 0$時，物體位置在原點$x = 0$、速度為v_0(>0)。本題考慮空氣阻力$f_r = -bv$，b 為一常數，v為物體速度。

(i)在$t = 0$時，物體動能對時間的變化率為 ____(16)____。

(ii)若此物體為子彈，此子彈出槍口時的速度為 $2v_0$。試問槍口位置為 $x =$ ____(17)____。

十三、如圖 9 所示一圓柱形玻璃杯用 100 °C 的熱水清洗後，杯內室溫氣體被加熱至 45 °C，此時部分氣體逸出，杯內壓力 P_1 比大氣壓力 P_2 多 3 kPa，杯口朝下置於桌面上，杯口與桌面接觸部分有少量水使玻璃杯吸附於桌面，氣體密閉於杯內，接著將玻璃杯靜置冷卻至室溫。假設大氣壓力 P_2 為 101 kPa，室溫 22 °C，視杯內氣體為理想氣體，玻璃杯口直徑 5 cm，杯子質量為 100 g，杯子厚度與杯口與桌面吸附力均可不計。求出要將玻璃杯拿起所需之力為______(18)______N。

（重力加速度 $g = 9.8\ m/s^2$ ）

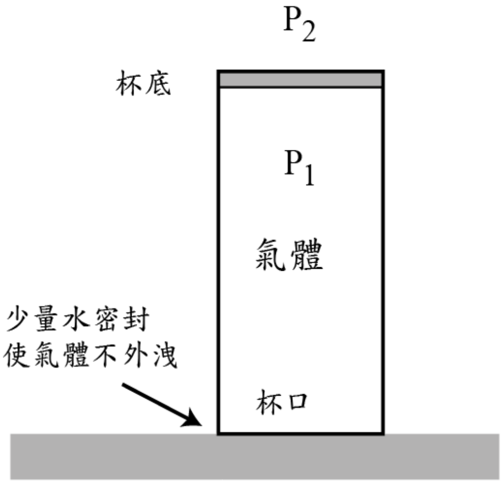

圖 9

十四、如圖 10，在與水平面夾角為 θ 的斜面 S 上，質量分別為 m_A 與 m_B 的 A 與 B 兩物體相疊且以一輕質細繩跨過質量可忽略的理想滑輪相連結，A 與 B 以及 A 與斜面 S 間的動摩擦與靜摩擦係數均分別為 μ_k 與 μ_s，其中 $\mu_s < \frac{1}{3}\tan\theta$。

(i)從靜止開始，此系統能維持靜止的條件為______(19)______。

（請以$f_1(\mu_k, \mu_s, \theta) \leq \frac{m_B}{m_A} \leq f_2(\mu_k, \mu_s, \theta)$的形式作答，上下界各 2 分）

(ii)系統受到一個外加瞬間的衝量，使得物體B以大於 0 的速率往左下移動，則之後運動中 B 的加速度為______(20)______（朝左下為正，右上為負）。

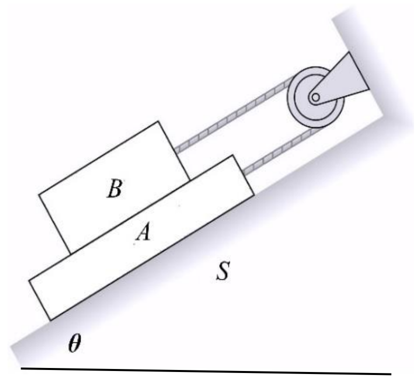

圖 10

十五、以準靜的方式用無摩擦的活塞將處於平衡態的氣體從體積 V_i 壓縮到 V_f，過程中氣體與溫度固定為 T 的熱庫隨時保持熱平衡。此過程中活塞對氣體做功 W，氣體的熵變化為 ΔS_{sys}，而熱庫的熵變化為 ΔS_{bath}。

回復原狀後，再以非準靜的方式將同樣的過程（從體積 V_i 壓縮到 V_f）快速地執行一次，過程中氣體系統仍與溫度 T 的熱庫隨時保持熱接觸，最後讓氣體停留在體積 V_f 以與溫度 T 的熱庫達到平衡態，所得到的三個對應的物理量分別為 W'、$\Delta S'_{sys}$ 與 $\Delta S'_{bath}$。請於下列三組選項中分別選出正確的關係，以代號表示。

答： ______(21)______(每組各選一個，對兩項得 2 分，全對得 4 分)。

組(1)： (A) $W' < W$, (B) $W' = W$, (C) $W' > W$;

組(2)： (D) $\Delta S'_{sys} < \Delta S_{sys}$, (E) $\Delta S'_{sys} = \Delta S_{sys}$, (F) $\Delta S'_{sys} > \Delta S_{sys}$;

組(3)： (G) $\Delta S'_{bath} < \Delta S_{bath}$, (H) $\Delta S'_{bath} = \Delta S_{bath}$, (I) $\Delta S'_{bath} > \Delta S_{bath}$

十六、隔熱窗是由兩片玻璃（標示為玻璃 1 和玻璃 2）與其中空氣夾層所組成，如圖 11 所示。此處考慮屋內外溫度分別維持為 T 和 $T+\Delta T$，玻璃厚度為 a，空氣層厚度為 b，其導熱係數分別為κ_a 與 κ_b。回答以下問題：

(i)求玻璃 1 兩表面 (分別與屋內與空氣層接觸) 間的溫差ΔT_a= ____(22)____。

(ii)現考慮屋內溫度為 25 °C，屋外溫度為 -5 °C，

a = 3.5 mm，b = 7 mm，κ_a= 0.9 $\left(\frac{\mathrm{W}}{m\cdot K}\right)$與 κ_b= 0.026 $\left(\frac{\mathrm{W}}{m\cdot K}\right)$，求屋外玻璃(玻璃 2)內側溫度（即圖中標示之 T_2）。T_2 = ____(23)____°C。

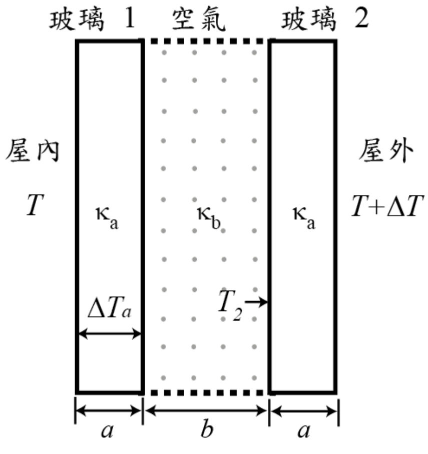

圖 11

十七、一根長度為L，質量為M的細棒，其一端 A 在光滑的水平地面上，A 端與地面無摩擦力；另一端 B 以一垂直細繩連接，使細棒維持仰角為θ_0的平衡狀態。已知細棒的質心與 A 端的距離為x_{cm}，如圖 12 所示，細棒繞其質心轉動的轉動慣量為I_{cm}。試問細繩在 B 端與細棒的連結斷開，細棒自靜止掉落至仰角為θ時，細棒繞質心轉動的角速率ω的ω^2表達式為？

答： ____(24)____。

(A) $\omega^2 = \frac{2Mgx_{\mathrm{cm}}(\sin\theta_0-\sin\theta)}{I_{\mathrm{cm}}+Mx_{\mathrm{cm}}^2}$

(B) $\omega^2 = \frac{2Mgx_{\mathrm{cm}}(\sin\theta_0-\sin\theta)}{I_{\mathrm{cm}}+Mx_{\mathrm{cm}}^2\sin^2\theta}$

(C) $\omega^2 = \frac{2Mgx_{\mathrm{cm}}(\sin\theta_0-\sin\theta)}{I_{\mathrm{cm}}+Mx_{\mathrm{cm}}^2\cos^2\theta}$

(D) $\omega^2 = \frac{2Mgx_{\mathrm{cm}}(\sin\theta_0-\sin\theta)}{I_{\mathrm{cm}}}$

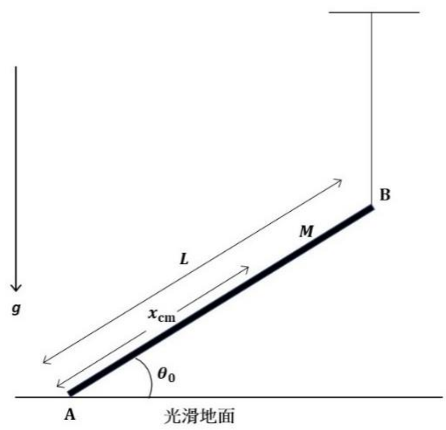

圖 12

承上題，試求細棒與地面碰撞前的瞬間，地面對 A 端的作用力大小 $|\vec{N}|$ = ____(25)____。

十八、空間中有一力場，它對質量為M、座標為(x,y,z)之質點所形成的位能可寫為 $U = 2MC^2(4x^2+9y^2+16z^2)$，其中$C$為大於零的常數。考慮該空間中一個質量為$3m$的質點，初始位置為$\vec{x}_0=(1,0,0)$，初始速度為$\vec{v}_0=(0,a,a)$，其中$a$的量值與 C 相同，靠此力場在該空間中作周期性運動。

(i)該質點運動的周期為____(26)____。

(ii)該質點位移在 y 方向上之分量隨時間變化的函數 $y(t)$ =____(27)____。

十九、黑洞是一種類星體，有極強大的重力以致於所有的粒子與光等電磁輻射都不能逃脫距離中心為R_s的球形區域，所以可以將黑洞簡化為一質量為M、半徑為R_s的球體，本問題中忽略黑洞可能帶有的電荷與角動量。

理論上已知R_s為重力常數G、光速c以及黑洞質量M的函數，且黑洞的表面積正比於熵，因此在所有過程中表面積不會減少，只會不變或增加。利用以上事實分析兩個質量分別為$29M_s$、$36M_s$(M_s為太陽質量)之黑洞合併成為一個黑洞的過程中，因輻射重力波所造成的能量損失，若忽略黑洞的動能，估計此能量損失的最大值為______(28)______ $M_s c^2$（取四捨五入的整數值）。

二十、Wilberforce pendulum 是如下圖 13 所示的一個力學系統。螺旋彈簧下方有一個剛體，其轉動慣量可以透過旋轉兩側的螺桿來調整。當我們把剛體往下拉時螺旋彈簧會沿著垂直軸的扭轉，因此剛體除了會受彈簧的恢復力而上下振動外，也會受到彈簧的扭轉而在水平面上轉動，且剛體的上下振動和其水平轉動會產生耦合。假設這個系統的彈性位能可由下式描述：

$$V(z,\theta)=\frac{\omega_0^2}{2}\left(m_0 z^2+2\epsilon\sqrt{m_0 I_0}z\theta+I_0\theta^2\right),$$

其中m_0是剛體的質量、I_0是剛體水平旋轉的水平轉動慣量，$\epsilon \ll 1$。z是剛體離平衡點的垂直位移，θ是剛體水平旋轉的角度。ω_0是當$\epsilon \to 0$時，系統振動及轉動的自然頻率。初始時我們稍微將剛體往下拉z_0的長度，並將之由靜止釋放，定義此時的θ角為 0。某人測量剛體的上下振動$z(t)$，得到下圖 14。求$\epsilon =$______(29)______及$\omega_0 =$______(30)______rad/s。(提示：可令$\tilde{z}=\sqrt{m_0}z,\ \tilde{\theta}=\sqrt{I_0}\theta$ 以方便解題)

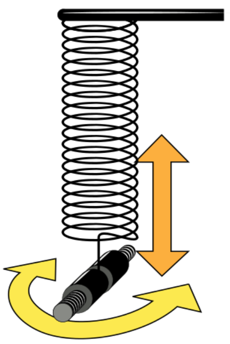

圖 13

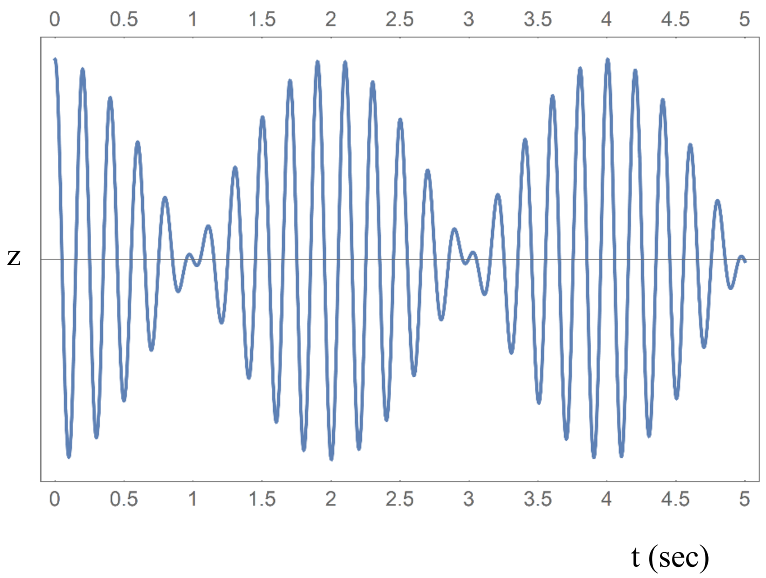

圖 14

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、Euler's Disk

如下圖 15 所示，一個半徑為a、質量為m的均勻薄圓盤，與水平桌面的夾角$\alpha > 0$，圓盤的質心 C 位於z軸（單位向量$\hat{\boldsymbol{z}}$）上，維持不動。在繞著z軸以等角速度$\Omega\hat{\boldsymbol{z}}$轉動的座標系 S 中，圓盤以角速度$\Omega_{\mathrm{d}}\hat{\boldsymbol{e}}_3$繞垂直於盤面的對稱軸 CD（單位向量$\hat{\boldsymbol{e}}_3$）旋轉，且$\Omega_{\mathrm{d}}$為定值，以致圓盤在質心維持不動下，穩定地在水平桌面上做純滾動運動。

已知重力加速度垂直向下，量值為g；xyz座標系為靜止於空間的直角座標系，其原點位於 O，座標軸的單位向量為$\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$、$\hat{\boldsymbol{z}}$。

注意：$\hat{\boldsymbol{e}}_1$、$\hat{\boldsymbol{e}}_3$及$\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \hat{\boldsymbol{e}}_1$為轉動座標系 S 中的單位向量，均以等角速度$\Omega\hat{\boldsymbol{z}}$在空間中轉動。此外，圓盤以其直徑為轉軸(如單位向量$\hat{\boldsymbol{e}}_1$)的轉動慣量$I_1 = \frac{1}{4}ma^2$。

在下圖所示的狀況時，依據上述說明，回答以下各問題。答案只能以上述說明中所定義的物理量符號表示，且用以表示方向的單位向量只可使用$\hat{\boldsymbol{e}}_1$、$\hat{\boldsymbol{e}}_2$、$\hat{\boldsymbol{e}}_3$。

(A)當圓盤在質心不動下做純滾動時，比值$\Omega_{\mathrm{d}}/\Omega$為何？ (4 分)

(B)圓盤相對於xyz座標系的角速度$\vec{\omega}$分別為何？ (2 分)

(C)圓盤以 O 為參考點的總角動量$\vec{L}$為何？ (4 分)

(D)以g、a、α表示Ω^2。(5 分)

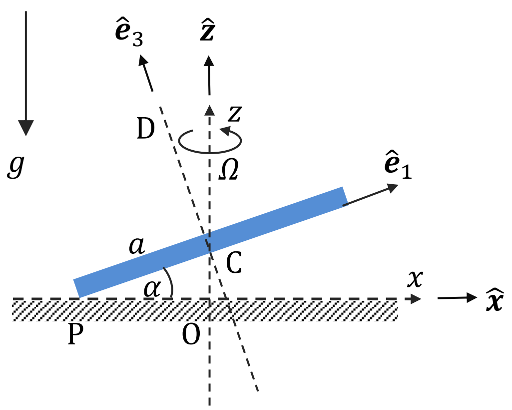

圖 15

二、無重力狀態下氣體在兩溫度牆之間的分布

在星際有一個以等速度飛行的太空站上，有一個寬闊的矩形封閉空間，填入單原子理想氣體，氣體的總原子莫耳數N與總體積V的比為密度 $n_0 = N/V$。封閉空間的高度(z方向)為h，長、寬皆為L，且 $L \gg h$，以至在討論氣體的實際分布時只需考慮牆面$z = 0$(此牆面溫度保持為T_1)，與牆面$z = h$ (此牆面溫度保持為$T_1 + \Delta T$)的影響，其他四面牆的影響可以忽略不計，如下圖 16 所示。h遠大於氣體中的平均自由徑l (即$h \gg l$)，h約為數公尺而l約在微米(μm)等級。氣體可以在相距為l等級的空間中分別達成各自的局域穩態平衡的狀態，即可將壓力視為常數。

(A) 考慮 $\Delta T/T_1 \ll 1$ 的情形：

若$\Delta T/T_1 \ll 1$ 時，我們可以假設線性的分布，如 $T(z) = T_1 + \frac{z}{h}\Delta T$ 。

試求氣體的莫耳密度的分布 $n(z)$。(5 分)

答案保留至 $\Delta T/T_1$ 的一階項。

(B) 考慮 $\Delta T/T_1$ 比較大(非$\ll 1$)的情形：

氣體的熱導率$\kappa = nvlc_V/3$，其中n、 v與c_V 分別為氣體的密度、平均速率與莫耳熱容量。若κ與氣體溫度T的關係為$\kappa = A_\kappa T^\alpha$，係數$A_\kappa$與指數$\alpha$皆與$T$無關。另已知$n$, l 也都與T無關，z 方向熱量傳遞速率為一定值。

(i)試問 $\alpha =$ ？ (2 分)

(ii)此時，莫耳密度可寫為 $n(z) = a/(1 + bz)^\beta$，試求 a、b 與β。(8 分)

圖 16

2024 年第 24 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 54 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試參考解答

壹、選擇填充混合題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

一、

參考解答：(1)　(B)

二、

參考解答：(2)　(A)

三、

參考解答：(3)　(B)

四、

參考解答：(4)　(D)

五、

參考解答：(5)　(B)　，(6)　$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}$

六、

參考解答：(7)　$\frac{64}{11}$

七、

參考解答：(8)　0　，　(9)　$\sqrt{\frac{2m}{3k_2}}v$

八、

參考解答：(10)　$\frac{fk_BN}{2}$　，　(11)　$\frac{f}{2}$

九、

參考解答：(12)　$\left(\frac{mg}{k\ell}\right)^{1/3}$

十、

參考解答：(13) 0.11 ， (14) 3.6×10^{-3}

十一、

參考解答：(15) $\frac{\rho dc}{6h}\cdot\ln\left(\frac{T_h-T_{air}}{T_c-T_{air}}\right)$

十二、

參考解答：(16) $-bv_0^2$ ， (17) $-\frac{mv_0}{b}$

十三、

參考解答：(18) 9.82

十四、

參考解答：

(19) $\frac{1-\mu_s\cot\theta}{1+3\mu_s\cot\theta}\le\frac{m_B}{m_A}\le\frac{1+\mu_s\cot\theta}{1-3\mu_s\cot\theta}$ ， (20) $\frac{m_B-m_A}{m_A+m_B}g\sin\theta-\frac{m_A+3\,m_B}{m_A+m_B}\mu_k g\cos\theta$

十五、

參考解答：(21) (C)、(E)、(I)

十六、

參考解答：(22) $\frac{\kappa_b a}{2\kappa_b a+\kappa_a b}\Delta T$ ， (23) -4.58

十七、

參考解答：(24) C ， (25) $\frac{MgI_{cm}}{I_{cm}+Mx_{cm}^2}$

十八、

參考解答：(26) $\frac{\pi}{C}$ ， (27) $\frac{1}{6}\sin(6Ct)$

十九、

參考解答：(28) 19

二十、

參考解答：(29) 0.1 ， (30) 10π

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

第一題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 4 分	正確寫出接觸點 P 在 S 坐標系下的速度 $= -a\Omega_d \hat{e}_2$ 或 正確寫出 S 座標系的 P 在固定座標系 xyz 中的速度$=$ $-a\Omega\cos\alpha\,\hat{e}_2$	1	正確寫出其中 1 個均可給 1 分
	寫出接觸點 P 在 xyz 座標系為 0	1	
	寫出正確的 $\frac{\Omega_d}{\Omega} = -\cos\alpha$	2	
(B) 2 分	寫出 $\vec{\omega} = \Omega_d \hat{e}_3 + \Omega\hat{z}$	1	未將 Ω_d 與 Ω 關係帶入，不扣分。
	寫出$\hat{z} = \sin\alpha\,\hat{e}_1 + \cos\alpha\,\hat{e}_3$	1	
(C) 4 分	正確寫出相對質心 C 角動量= $\frac{1}{4}ma^2\Omega\sin\alpha\,\hat{e}_1$	2	
	正確寫出質心 C 相對於 O 角動量 $=0$	1	
	寫出正確的角動量$\vec{L} = \frac{1}{4}ma^2\Omega\sin\alpha\,\hat{e}_1$	1	
(D) 5 分	正確寫出相對於 O 之力矩 $\hat{\tau} = mga\cos\alpha\,\hat{e}_2$	1	
	利用 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$	1	
	得出正確的$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \Omega\hat{z}\times\hat{e}_1 = \Omega\cos\alpha\,\hat{e}_2$	1	
	得出正確的$\Omega^2 = \frac{4g}{a\sin\alpha}$	2	

第二題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	寫出 $n(z_1)RT(z_1)=n(z_2)RT(z_2)$	1	
	得出$n(z=0)-n\left(z=\frac{h}{2}\right)=n\left(z=\frac{h}{2}\right)-n(z=h)=\mathit{\Delta} n=\frac{n_0\mathit{\Delta} T}{2T_1+\mathit{\Delta} T}\approx\frac{n_0\mathit{\Delta} T}{2T_1}$	2	不用近似，近似也可以
	正確得到 $n(z)=n_0+n_0\frac{\mathit{\Delta} T}{2T_1}(1-2z/h)$	2	
(B) (i) 2 分	寫出正確答案　$\alpha=1/2$	2	
(B) (ii) 8 分	寫出 $n(z)=\frac{P}{RT(z)}$	1	a: 1 分。 b: 1 分 β: 1 分
	寫出 $\frac{dz}{dT}\propto T^{1/2}$	1	
	寫出 $\frac{z}{h}\propto T^{\frac{3}{2}}-T_1^{\frac{3}{2}}$ 或 得到 $\frac{z}{h}=(T^{\frac{3}{2}}-T_1^{\frac{3}{2}})/[(T_1+\mathit{\Delta} T)^{\frac{3}{2}}-T_1^{\frac{3}{2}}]$	1	
	寫出 $T(z)=T_1\left(1+\left[\left(1+\frac{\Delta T}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]\frac{z}{h}\right)^{3/2}$	1	
	寫出 $a=P/RT_1$	1	
	得到正確的 a,b,β 值	3	