2025年第25屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第55屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2025 年 2 月 15 日
13：30~16：30
考試時間：三小時

〈〈注意事項〉〉

一、限使用黑色或藍色原子筆作答。
二、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
三、各計算題請在答案卷上指定頁面的**正面**作答，每大題答案卷二頁。
四、可使用掌上型計算器（含科學工程式計算機）。

可能用到的數學公式(t為時間，x為任意物理量)

1. $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ ， $f''(x) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$；

$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$ ， $\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$。

2. $\frac{d}{dx}(ax+b)^m = ma \cdot (ax+b)^{m-1}$； $\frac{d}{dx}\ln(ax+b) = a \cdot (ax+b)^{-1}$；

$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$； $\frac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)$； $\frac{d\cos(ax)}{dx} = -a\sin(ax)$

3. $\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a} + \mathrm{C}$， $m \neq -1$； $\int (ax+b)^{-1} dx = \frac{1}{a}\ln(|ax+b) + \mathrm{C}$；

$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + \mathrm{C}$； $\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$，

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + \mathrm{C}$； $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$。(在此，C 為一個常數)

4. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ ， $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$

6. 泰勒展開：

$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$ ， $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ ， $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots$ 。

7. $I_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$，$I_0 = \sqrt{\pi}/2$， $I_1 = 1/2$，$I_2 = \sqrt{\pi}/4$

8. **平行軸定理:**

設直線L_{CM}通過一剛體的質心，若有一旋轉軸L平行於L_{CM}，則剛體繞此旋轉軸L轉動之轉動慣量 I 可寫為:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_{CM} + Md^2$$

其中 I_{CM} 為剛體繞質心旋轉軸 L_{CM} 轉動的轉動慣量，M 是剛體的質量，d 為 L 與L_{CM}之間的距離。

2025年第25屆亞洲物理及第55屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、

在太空中有兩個天體，可被視為質量分別為M及m的質點。初始時，兩者相距 D，m相對於M的速率為 v ，且M 到 m 之速度向量沿伸線的垂直距離 (稱為 impact parameter) 為 b。已知 m 相對於M做橢圓軌道運動，並選取系統的質心位置為座標系的原點。

(A) 求此系統的總力學能。

(B) 求 v 值的上限。

(C) 求橢圓軌道的半長軸 a =?。

(D) 求一個週期內兩質點的最短距離 r_{min} =?。

(E) 若 D 比橢圓軌道的半焦弦長短，但比兩質點的最短距離長，求兩質點連續兩次距離為 D 之間，M 的位移量值。答案以半長軸 a 、r_{min}與本題提供之符號表示。

已知：若以橢圓其中一個焦點為原點，如圖 1 所示，橢圓的方程式可以表示為 $\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e\cos\theta$，其中$a$為半長軸，$e$ 為常數，稱為離心率。

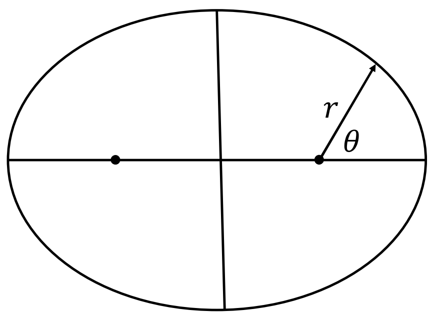

圖 1

二、

考慮如圖 2 的單擺，繩長為 l，擺錘質量為 m，擺角為θ（指擺繩位置與鉛垂線間的夾角）。

(A) 單擺支點固定於天花板，擺錘從擺角 θ_0 由靜止態釋放擺到 θ 時，擺錘加速度的量值為何？

(B) (承上小題) 當擺錘速度沿鉛垂線的分量最大時，$\cos\theta$ 值為何？

(C) 將單擺的支點固定在質量為 M 的物體上（見圖 3，$M \geq m$），該物體可在一水平置放的軌道上幾乎無摩擦地滑動。擺錘從擺角 θ_0 處由靜止態釋放，請問：

(i) 物體 M 的最大動能為何？

(ii) 擺角 θ 的運動方程式為何？
（表述成 $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})$.）

(iii) 本裝置的小角度擺動週期為何？（此處可對運動方程式取小角度近似，$\theta_0 \ll 1$，可只保留到擺角的一次項。）

(D) 將單擺支點**固定於汽車車頂**，當擺錘從擺角 θ_0 處由靜止態釋放擺到 θ 時，汽車瞬間起動，以 $a \equiv g\tan\varphi$ 的等加速度向左行進。請問接下來單擺擺動之擺幅 β 的餘弦值 $\cos\beta$ 為何？其小角度擺動的週期為何？
(作答請用 φ，而不用 a 來表述。擺幅指擺動過程中，所涵蓋之擺角範圍的一半。)

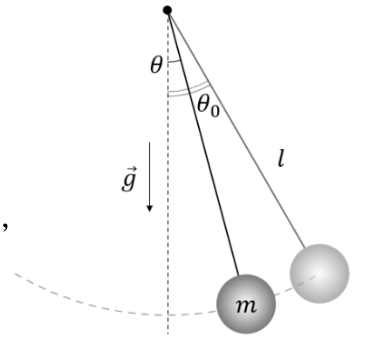

圖 2

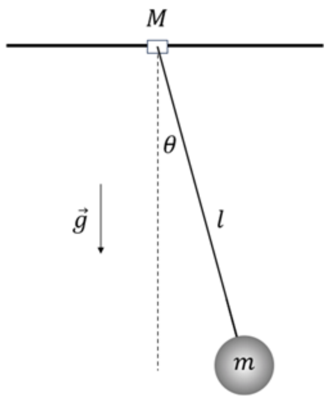

圖 3

三、

(A) 如圖 4 所示，二個完全相同，半徑為 r，質量為 m 的中性金屬小球，以一全長為 L 的可撓輕質導線連接，並將之置於一方向沿二金屬球中心連線的均勻靜電場 $\boldsymbol{E}$ 中。二金屬球在中心距離為 d（$r \ll d \ll L$）時，由靜止狀態在電場中釋放。忽略重力效應，回答下列問題。

金屬球在電場的作用下，球中的電荷會沿輕質導線轉移，使二個金屬球分別帶正、負電荷。假設電荷在二個金屬球間轉移的過程相當緩慢（電流趨近於零，可忽略磁效應），且由於 $r \ll d \ll L$，故除了考慮表面電位時之外，金屬球可視為點電荷，亦即彼此的存在不會影響金屬球表面上的電荷分佈。

(i) 如圖 5 所示，當二個金屬球中心距離為 $2x$ 時，金屬球上的電量 q 為何？

(ii) 二個金屬球由靜止在電場中被釋放後，在輕質導線完全伸展的瞬間，金屬球的速度量值為何？

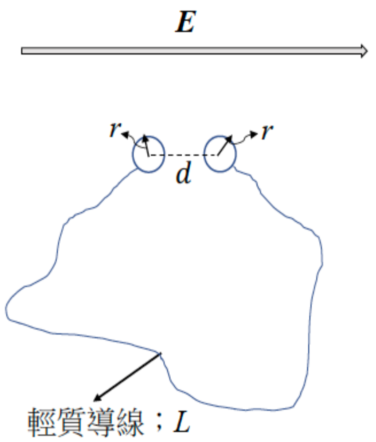

圖 4

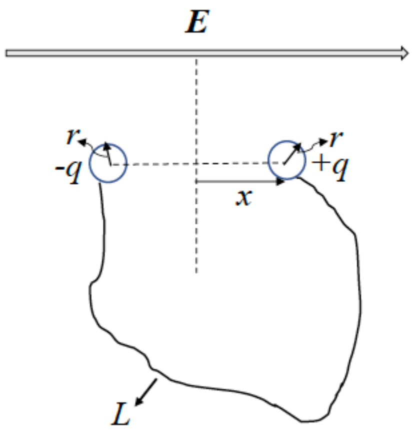

圖 5

(B) 一總長度為 D，電阻可忽略的細導線，緊密纏繞成高度為 ℓ 的圓柱形螺線圈，線圈兩端各繫有半徑為 r 的金屬小球。假設起始時金屬球上的電量為分別為 $+Q$ 和 $-Q$，且 $r \ll \ell \ll D$，試回答下列問題。

(i) 此系統的電容量值為何？

(ii) 此系統可近似模擬為一電容-電感電路（LC circuit），其振盪角頻率 ω 為何？

四、 兩條平行載流導線的自感

圖 6 所示為兩條各自平行於z軸(垂直頁面穿出)、載有電流i、半徑b的圓形長直導線的橫截面($z=0$)。我們假設電流均勻分布於導線截面，且兩導線中心O_1與O_2的距離$D \gg b$。座標系原點O位於線段O_1O_2的中點。導線 1 與 2 在無窮遠處的末端相連，形成封閉迴路，故由導線 2 的 P'處流入的電流，由導線 1 的 P'處流出，亦即這兩點是屬於同一條封閉的電流細絲(即線狀的迴路)，簡稱為細絲 P'。

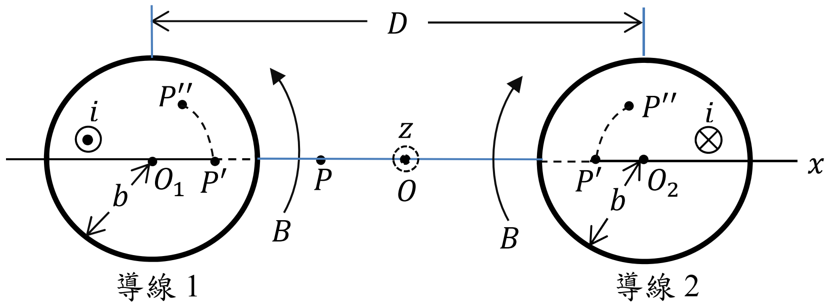

圖 6

提示：

1. 當一條導體迴路所連結的磁通量Φ是來自於該迴路本身的電流 i 所產生的磁場時，我們有$\Phi = Li$，其中L稱為該迴路的自感。在本題中，由於沿z方向可近似為具有平移不變性，Φ與L可改為代表沿z方向每單位長度的磁通量與自感。
2. 任何特定的電流細絲(如細絲 P')所連結的磁通量，一般與其他細絲(如細絲 P'')不同。

   尤其是導線 1 中的電流產生的磁場，其對導線 1 內不同徑向距離處的磁通量貢獻，變化很大。在此情況下，要計算導線 1 所連結的磁通量Φ，必須對通過導線 1 內任意點(如圖中的 P'')的細絲所連結的磁通量，以通過該點所在處的微小電流 JdS 進行加權平均，即

$$\Phi = \frac{1}{i}\int_S \phi J dS \qquad i = \int_S J dS \tag{1}$$

   其中 S 為導線的橫截面積，J 為電流密度，ϕ 為通過積分點的細絲所連結的磁通量。

   但當導線 1 夠細微以致$b \ll D$時，則導線 2 中的電流在導線 1 內部產生的磁場微弱，且變化不大，故在此情況下，要計算導線 1 所連結的磁通量時，可將導線 1 視為是位於O_1的一條細絲(沿z軸)。

(A) 試求位於線段O_1O上、距離O_1為r處，導線 1 和導線 2 的電流所產生的磁場量值B。注意：r的範圍為$D/2 \geq r \geq 0$。

(B) 試求圖 6 電路沿z方向每單位長度的自感L。

(C) 對於沒有集總電感的電池電路，其中連接兩極的導線雖然不平行，但相隔約 100 倍於其半徑，在(B)部分導出的L公式仍將給出正確的數量級，試估計其每單位長度的電感量值。已知：磁導率$\mu_0 \approx 1.3\ \mu\text{H/m}$。

五、 熱傳問題

有一根圓柱形金屬棒，棒的一端接觸一個熱庫(維持溫度為T_1)，而另一端暴露於空氣中(環境溫度為T_e), 如圖 7 所示。已知 $T_1 > T_e$，金屬棒的熱導係數遠大於表面傳熱係數，即垂直棒軸方向的溫度梯度可忽略，我們可考慮熱量只沿著軸方向(x 軸方向) 傳導，而傳入金屬棒的熱量可藉由的側表面與端表面散失於環境中。已知棒長為 L，截面積為 A，接觸熱庫端點處$x = 0$。熱傳導功率 P_{cond}可表為

$$P_{cond}(x) = -\kappa A \frac{dT}{dx} \qquad (1)$$

此處 κ 為熱傳導係數，單位為$\left(\frac{W}{mK}\right)$ 。

同時熱損失功率P_L可表為

$$P_L(x) = hS(T(x) - T_e) \qquad (2)$$

此處 S 為棒與空氣接觸的表面積，h 為傳熱係數，包含空氣與金屬的對流傳熱與熱輻射效應，單位為$\left(\frac{W}{m^2K}\right)$。考慮金屬棒與環境達熱穩定態。

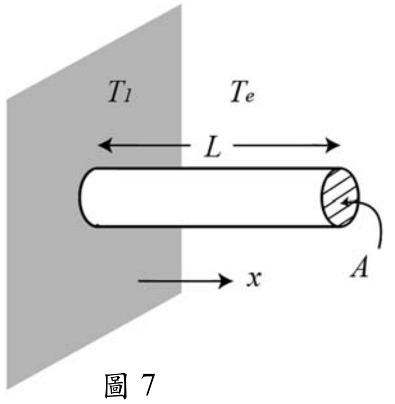

圖 7

(A) 現在令 $\theta(x) = T(x) - T_e$，P 為圓棒截面周長，在棒內 $(0 \le x \le L)$ $\theta(x)$可滿足

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \eta^2\theta = 0 \qquad (3)$$

求η (以 h, κ, P, A 表示)。

(B) 考慮 $\theta(x)$的邊界條件，已知在$x = 0$ 處 $\theta(0) = T_1 - T_e \equiv \theta_0$，在$x = L$ 處

$$\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} = \xi\theta \qquad (4)$$

求 ξ(以 h, κ, P, A 表示)。

(C) 求解 $\theta(x)$ 。

(D) 現在已知此金屬棒為黃銅棒，$T_1 = 37^{\circ}$C，$T_e = 15$℃，棒長 L= 8 cm，半徑 $r =$ 3mm，h = 16.3 $\left(\frac{W}{m^2K}\right)$，$\kappa$ = 109 $\left(\frac{W}{mK}\right)$。求黃銅棒在中間(x = 4 cm)與頂端(x = 8 cm)的溫度。

六、 聲光調制晶體

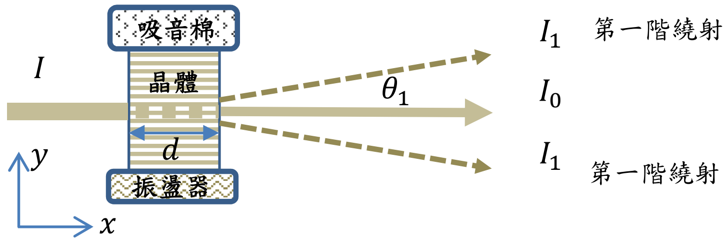

圖 8

考慮一個折射率為n_0 厚度為 d 的晶體因底部振盪器的週期性振動而在內部產生波長為 λ_s 的聲波，此聲波朝 y 方向前進至晶體另一側後被吸音棉吸收，因此**不考慮**聲波來回傳遞而產生駐波。由於聲波造成晶體密度週期性變化，晶體中 y 方向亦產生週期性的折射率變化。當一道強度為 I 波長為 λ 的雷射光沿 x 方向穿過此晶體，且雷射光束的半徑甚大於 λ_s，使通過不同高度的雷射光因為彼此相位不同而產生繞射，如圖 8。因為光速遠大於晶體中的聲速，可將光通過晶體期間，晶體的折射率變化近似視為凍結不隨時間改變，亦即某瞬間的折射率可寫成

$$n(y) = n_0 + \Delta n\, sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_s} y\right)$$

若$\lambda \ll \lambda_s$且僅需考慮產生第一階繞射(光強度為I_1)，更高階繞射強度可忽略，直接穿過晶體的光強度剩下I_0，且晶體不吸收光，依能量守恆可得 $I = I_0 + 2I_1$。此聲光調制晶體的繞射效率定義為 $\eta = I_1/I$ 。

(A) 求第一階繞射的繞射角θ_1。

(B) 求同一時間某一高度y的光波在晶體左右兩側位置的相位的差值(相位差) 隨y變化的函數 $\Delta\phi(y)$。

(C) 假設週期性的折射率變化可近似為 $n_0 \pm \Delta n/\sqrt{2}$，如圖 9 所示，每個聲波波長區間中有半個波長區間折射率為 $n_0 + \Delta n/\sqrt{2}$，另半個波長區間折射率為 $n_0 - \Delta n/\sqrt{2}$，且 $d\,\Delta n \ll \lambda$，求此聲光調制晶體的繞射效率 η (以d、Δn、λ 的組合表示η)。推導過程中，正弦函數與餘弦函數可適時使用小角度近似，亦即當$\alpha \ll 1$時$\sin(\alpha) \approx \alpha$，$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$。

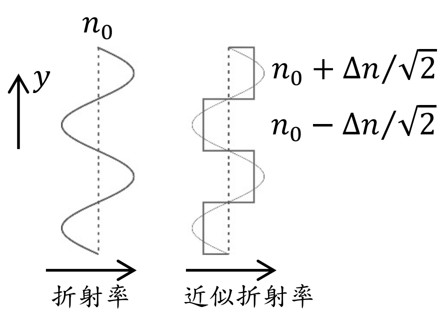

圖 9

2025 年複選

第 1 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	得出 $E=\frac{mM}{2(m+M)}v^2-\frac{GmM}{D}$	5	
(B) 5 分	得出 $\frac{mM}{2(m+M)}v^2-\frac{GmM}{D}<0$	2	意即答案正確性 3 分
	得到 $v<\sqrt{\frac{2G(m+M)}{D}}$	3	
(C) 5 分	寫出 $E=\frac{-GmM}{2a}$	2	
	得到正確 $a=\frac{G(m+M)D}{2G(m+M)-v^2D}$	3	
(D) 5 分	寫出角動量守恆 $L=\mu v_{\max}r_{\min}=\mu vb$	1	僅利用橢圓軌跡方程式寫出 $r_{\min}=a(1-e)$ 不給分。
	寫出力學能守恆 $E=\frac{1}{2}\mu v_{\max}^2-\frac{GmM}{r_{\min}}=\frac{1}{2}\mu v^2-\frac{GmM}{D}$	1	
	得到正確 $r_{\min}=\frac{GD(m+M)-\sqrt{D^2G^2(m+M)^2+Db^2v^2[v^2D-2G(m+M)]}}{2G(m+M)-v^2D}$	3	
(E) 5 分	得到以 M 為參考點，m 位移大小 $d_m=2D\left\{1-\left[\frac{r_{min}(2a-r_{min})-aD}{D(a-r_{min})}\right]^2\right\}^{1/2}$	4	
	得到以質心為參考點，M位移大小 $\frac{m}{m+M}d_m=$ $\frac{2mD}{m+M}\left\{1-\left[\frac{r_{min}(2a-r_{min})-aD}{D(a-r_{min})}\right]^2\right\}^{1/2}$	1	

第 2 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 2 分	得出 $\lvert\vec{a}\rvert = g\sqrt{\sin^2\theta + 4(\cos\theta - \cos\theta_0)^2}$	2	
(B) 3 分	得出 $\cos\theta = \left(\cos\theta_0 + \sqrt{3+\cos^2\theta_0}\right)/3$	3	
(C) (i) 6 分	寫出 M 速度 $\dot{x} = -\frac{ml\,\dot{\theta}\cos\theta}{M+m}$	2	
	寫出系統正確總動能 $\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - \frac{m^2l^2\cos^2\theta}{2(M+m)}\dot{\theta}^2$	2	
	得到M正確最大動能 $\frac{M}{2}\left(\frac{ml\dot{\theta}}{M+m}\right)^2 = \frac{m^2}{M+m}gl(1-\cos\theta_0)$	2	
(C) (ii) 4 分	寫出正確運動方程式 $\left(1-\frac{m\cos^2\theta}{M+m}\right)ml^2\ddot{\theta}$ $= -\frac{m^2l^2\sin 2\theta}{2(M+m)}\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta$	4	
(C) (iii) 4 分	得到 $\frac{M}{M+m}l\ddot{\theta} = -g\theta$	3	
	得到週期 $2\pi\sqrt{\frac{Ml}{(M+m)g}}$	1	
(D) 6 分	得到週期$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\varphi}$	2	
	得到 $\cos\beta = \cos(\theta-\varphi) - \cos\varphi\,(\cos\theta - \cos\theta_0)$	4	

第 3 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) (i) 5 分	得出 $\Delta V = \frac{2kq}{r}$	2	
	得出 $q = \frac{Erx}{k}$	3	
(A) (ii) 7 分	寫出電荷受淨力 $F_{net} = \frac{E^2rx}{k} - \frac{E^2r^2}{4k}$	2	沒有取 $r \ll d \ll L$ 化簡，不扣分
	寫出正確 $\frac{1}{2}mv^2 = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{L}{2}} F_{net}dx$	2	
	得到正確 $$v = E\sqrt{\frac{r}{mk}[\left(\frac{L}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{L}{2}+\frac{d}{2}-\frac{r}{2}\right)]} \approx \frac{EL}{2}\sqrt{\frac{r}{mk}}$$	3	
(B) (i) 5 分	寫出 $\Delta V = \frac{2kQ}{r}$	2	
	得到電容 $C = \frac{r}{2k}$	3	
(B) (ii) 8 分	寫出 $\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2dV$	2	
	得到正確電感 $L = \frac{\mu_0 D^2}{4\pi\ell}$	3	
	得到振盪角頻率 $$\omega = \frac{c}{D}\sqrt{\frac{2\ell}{r}}$$	3	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$

第 4 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 6 分	寫出　$B_{1\,\text{in}}=\frac{\mu_0 ir}{2\pi b^2}$　　$0\le r\le b$	2	
	寫出　$B_{1\,\text{out}}=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$　　$r\ge b$	2	
	寫出　$B_2=\frac{\mu_0 i}{2\pi(D-r)}$　　$0\le r\le D/2$	2	
(B) 16 分	寫出自B_2的單位長度磁通量 $$\Phi_2=\int_0^{D/2}\frac{\mu_0 i\,dr}{2\pi(D-r)}=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln 2$$	3	
	寫出來自$B_{1\,\text{out}}$的單位長度磁通量 $$\Phi_{1\,\text{out}}=\int_b^{D/2}\frac{\mu_0 i\,dr}{2\pi r}=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{D}{2b}$$	3	
	寫出來自導線 1 內點 P'' 細絲的磁通量 $$\phi_{1\,\text{in}}(r)=\int_r^b\frac{\mu_0 ir'\,dr'}{2\pi b^2}=\frac{\mu_0 i(b^2-r^2)}{4\pi b^2}$$	3	
	寫出來自$B_{1\,\text{in}}$的磁通量 $$\Phi_{1\,\text{in}}=\frac{\mu_0 i}{4\pi b^2}\frac{1}{\pi b^2}\int_0^b(b^2-r^2)2\pi r\,dr=\frac{\mu_0 i}{8\pi}$$	3	
	得到每單位長度的電感 $$L=\frac{\mu_0}{\pi}\left(\ln\frac{D}{b}+\frac{1}{4}\right)$$	4	
(C) 3 分	得到正確 $$L\approx\frac{1.3}{\pi}(4.6+0.25)\ \mu\text{H/m}\approx 2\times10^{-6}\ \text{H/m}$$	3	

第 5 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	寫出 $-\frac{d}{dx}\left(-\kappa A\frac{dT}{dx}\right)dx = \ hP(T-T_e)dx$	3	
	得出 $\eta = \sqrt{\frac{hP}{\kappa A}}$	2	
(B) 5 分	寫出 $-\kappa A\frac{dT}{dx}\|_{x=L} = hA(T(L)-T_e)$	3	
	得出$\xi = -\frac{h}{\kappa}$	2	
(C) 9 分	寫出 $\theta(0) = \theta_0 = C_1 + C_2$	3	
	寫出$\eta(C_1e^{\eta L} - C_2e^{-\eta L} = \xi(C_1e^{\eta L} + C_2e^{-\eta L})$	3	
	得到 $\theta(x) = \frac{e^{-\eta x}+me^{-2\eta L}e^{\eta x}}{1+me^{-2\eta L}}\theta_0$	3	
(D) 6 分	得到正確 $x = 4$ cm $\Rightarrow T = T_e + \theta = 32.7$ °C	3	
	得到正確 $x = 8$ cm $\Rightarrow T = T_e + \theta = 31.3$ °C	3	

第 6 題共 25 分 評分標準：

小題	內容	得分	備註
(A) 5 分	寫出“晶體相當於條紋間格為 λ_s 的光柵”	1	
	得出　$\theta_1 = \lambda/\lambda_s$	4	僅寫出 $\lambda_s\, sin\theta_1 = 1\lambda$ 得 3 分
(B) 5 分	寫出相位變化 $\phi(y) = \frac{2\pi}{\lambda} n(y) d = \frac{2\pi}{\lambda} d \left[n_0 + \Delta n\, sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_s} y\right)\right]$	5	
(C) 15 分	寫出$E_{\pm}(x,t) = E_0 e^{i(kx-wt+\Delta\phi)}$	3	
	寫出疊加後的電場 $E_+(x,t) + E_-(x,t)$ $= 2cos\left(kd\, \Delta n/\sqrt{2}\right) E_0 e^{i(kx-wt+kdn_0)}$	4	
	寫出 $\frac{I_0}{I} = 1 - 2\frac{I_1}{I} = 1 - 2\eta = cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\, \Delta n/\sqrt{2}\right)$	4	
	得到 $\eta = \left(\frac{\pi}{\lambda} d\Delta n\right)^2$	4	