2020 年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題, 選填題答案

考試時間: 2019 年 11 月 30 日 上午 10:00 ~ 12:00

第一部份: 選填題

說明: 本部份共有五題, 每一題或子題配分標於題前, 答錯不倒扣, 未完全答對不給分。

答案卡填答注意事項: 答案的數字位數少於填答空格數時, 請適度地在前面填入 0.

1. (7分) 設三角形 ABC 滿足 $\cos A : \cos B : \cos C = 1 : 1 : 2$. 將 $\sin A$ 表示爲 $\sqrt[s]{t}$, 其中 s 爲正整數, t 爲正有理數且爲最簡分數。試問: $s+t = \underline{\dfrac{①②}{③}}$. (化成最簡分數)

   答: $\dfrac{19}{4}$

2. 甲和乙兩人分別擲 n 個公平的硬幣, 並以 X 和 Y 記兩個人投擲出正面向上的硬幣個數。假設兩人擲硬幣是互相獨立的實驗。試問:

   (1) (3分) $n=5$ 時, $X=Y$ 的機率是多少? 答: $\underline{\dfrac{④⑤}{⑥⑦⑧}}$. (化成最簡分數)

   答: $\dfrac{63}{256}$

   (2) (4分) $n=6$ 時, $X=Y+1$ 的機率是多少? 答: $\underline{\dfrac{⑨⑩}{⑪⑫⑬}}$. (化成最簡分數)

   答: $\dfrac{99}{512}$

3. 令 M 爲四位數之正整數。將 M 的四個數字反過來寫出一個新的四位數 N (例如: 將四位數 1234 的四個數字反過來寫, 變成 4321)。令 C 爲 M 的各位數的數字和。已知 M, N 與 C 滿足下列性質:

   (i) 令 d 爲 $M-C$ 與 $N-C$ 的最大公因數且 $d < 10$.

   (ii) $\dfrac{M-C}{d}$ 與 $\dfrac{N}{2}+1$ 的整數部分相同。

   試問:

   (1) (3分) $d = \underline{⑭}$. 答: $d = 9$

   (2) (4分) 若滿足上述性質 (i) 與 (ii) 的 M 共有 m 個, 且最大的值爲 M_{max} 則 $(m, M_{max}) = \underline{(⑮⑯, ⑰⑱⑲⑳)}$. 答: $m = 01,\ M_{max} = 9102$

4. (7分) 令 $\mathbb{N}$ 表示所有正整數的集合。已知滿足:

$$1 \leq a \leq b \text{ 與 } \frac{a^2+b^2+a+b+1}{ab} \in \mathbb{N},$$

   的所有正整數解 $(a,b) = (a_n, a_{n+1}),\ \forall n \in \mathbb{N}$, 其中 a_n 的值由下列遞增的遞迴關係唯一決定:

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + r.$$

   試問 $(p,q,r) = \underline{(㉑, ㉒㉓, ㉔㉕)}$ 答: $p = 5,\ q = -1,\ r = -1$

5. 設 $\mathcal{S}$ 爲所有 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 的排列所成的集合。

(1) (2分) 對任一個 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_8\in\mathcal{S}$, 計算下列的乘積和:

$$S=\sigma_1\sigma_2+\sigma_3\sigma_4+\sigma_5\sigma_6+\sigma_7\sigma_8.$$

則對 $\mathcal{S}$ 內的所有元素, 所得的 S 的算術平均數爲 <u>㉖㉗</u>. 答: 78

(2) (5分) 在 $\mathcal{S}$ 中, 滿足「對所有的 $k=1,2,\ldots,7$, k 的後一個數字必定不是 $(k+1)$」的排列共有 <u>㉘㉙㉚㉛㉜</u> 個。答: 16687