

## 第 32 屆亞太數學奧林匹亞 (APMO) 競賽試題

比賽日期：2020 年 3 月 10 日

注意事項：本試題的內容僅可由 APMO 官方網站公布。在官方正式發布前，請勿洩露給任何人，尤其不得經由網路傳遞。

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題，每題滿分七分

**問題一.** 設  $\Gamma$  是三角形  $ABC$  的外接圓， $D$  為  $BC$  邊上的一點。由  $A$  點引  $\Gamma$  的切線，和通過  $D$  點並與  $BA$  平行的直線相交於  $E$  點。線段  $CE$  與  $\Gamma$  再交於  $F$  點。若點  $B, D, F, E$  共圓，試證  $AC, BF, DE$  共點。

**Problem 1.** Let  $\Gamma$  be the circumcircle of  $\triangle ABC$ . Let  $D$  be a point on the side  $BC$ . The tangent to  $\Gamma$  at  $A$  intersects the parallel line to  $BA$  through  $D$  at point  $E$ . The segment  $CE$  intersects  $\Gamma$  again at  $F$ . Suppose  $B, D, F, E$  are concyclic. Prove that  $AC, BF, DE$  are concurrent.

問題二. 證明  $r = 2$  為滿足以下條件的最大實數：對於一個正整數數列  $a_1, a_2, \dots$ ，若其滿足

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

對於所有正整數  $n$  都成立，則存在一個正整數  $M$ ，使得  $a_{n+2} = a_n$  對於所有  $n \geq M$  都成立。

**Problem 2.** Show that  $r = 2$  is the largest real number  $r$  which satisfies the following condition: If a sequence  $a_1, a_2, \dots$  of positive integers fulfills the inequalities

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

for every positive integer  $n$ , then there exists a positive integer  $M$  such that  $a_{n+2} = a_n$  for every  $n \geq M$ .

問題三. 請找出所有符合下列性質的正整數  $k$ ：存在某個正整數  $m$  和某個正整數子集  $S$ ，使得所有大於  $m$  的整數  $n$ ，都恰有  $k$  種方法能寫成  $S$  中相異元素的總和。

**Problem 3.** Determine all positive integers  $k$  for which there exist a positive integer  $m$  and a set  $S$  of positive integers such that any integer  $n > m$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  in exactly  $k$  ways.

問題四. 令  $\mathbb{Z}$  表示所有整數形成的集合。找出所有符合下列性質的整係數多項式  $P(x)$ ：

對於任何一個無窮整數數列  $a_1, a_2, \dots$ ，若  $\mathbb{Z}$  中的每一個整數在數列中都恰出現一次，則存在下標  $i < j$  及整數  $k$ ，使得  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j = P(k)$ 。

**Problem 4.** Let  $\mathbb{Z}$  denote the set of all integers. Find all polynomials  $P(x)$  with integer coefficients that satisfy the following property:

For any infinite sequence  $a_1, a_2, \dots$  of integers in which each integer in  $\mathbb{Z}$  appears exactly once, there exist indices  $i < j$  and an integer  $k$  such that  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j = P(k)$ .

**問題五.** 令  $n \geq 3$  為一正整數。黑板上寫有  $n$  個 1。在黑板的下方有兩個水桶，在遊戲開始時是空的。每次行動時，從黑板上選取兩個數字  $a$  和  $b$ ，擦掉它們並改寫上 1 與  $a + b$ ，之後在第一個水桶裡放入 1 顆石頭，第二個水桶放入  $\gcd(a, b)$  顆石頭，其中  $\gcd(a, b)$  表  $a$  與  $b$  的最大公因數。經過有限次行動後，第一個水桶裡有  $s$  顆石頭，第二個水桶裡有  $t$  顆石頭，其中  $s$  和  $t$  為正整數。求  $\frac{t}{s}$  的所有可能值。

**Problem 5.** Let  $n \geq 3$  be a fixed integer. The number 1 is written  $n$  times on a blackboard. Below the blackboard, there are two buckets that are initially empty. A move consists of erasing two of the numbers  $a$  and  $b$ , replacing them with the numbers 1 and  $a + b$ , then adding one stone to the first bucket and  $\gcd(a, b)$  stones to the second bucket. After some finite number of moves, there are  $s$  stones in the first bucket and  $t$  stones in the second bucket, where  $s$  and  $t$  are positive integers. Find all possible values of the ratio  $\frac{t}{s}$ .

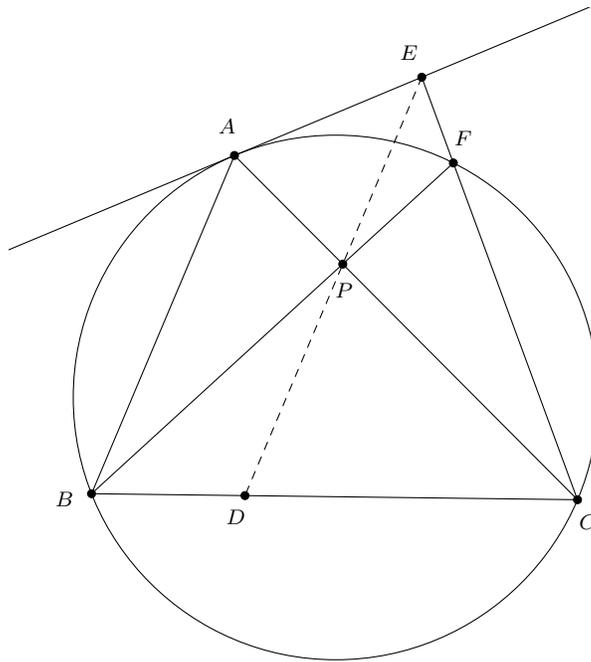
## 第 32 屆亞太數學奧林匹亞競賽詳解暨評分標準

問題一. 設  $\Gamma$  是三角形  $ABC$  的外接圓， $D$  為  $BC$  邊上的一點。由  $A$  點引  $\Gamma$  的切線，和通過  $D$  點並與  $BA$  平行的直線相交於  $E$  點。線段  $CE$  與  $\Gamma$  再交於  $F$  點。若點  $B, D, F, E$  共圓，試證  $AC, BF, DE$  共點。

**Problem 1.** Let  $\Gamma$  be the circumcircle of  $\triangle ABC$ . Let  $D$  be a point on the side  $BC$ . The tangent to  $\Gamma$  at  $A$  intersects the parallel line to  $BA$  through  $D$  at point  $E$ . The segment  $CE$  intersects  $\Gamma$  again at  $F$ . Suppose  $B, D, F, E$  are concyclic. Prove that  $AC, BF, DE$  are concurrent.

**解.**

**解法一.** 如圖，由題設可推得



$$\begin{aligned}
 \angle CBA &= 180^\circ - \angle EDB = 180^\circ - \angle EFB \\
 &= 180^\circ - \angle EFA - \angle AFB \\
 &= 180^\circ - \angle CBA - \angle ACB = \angle BAC.
 \end{aligned}$$

設點  $P$  為直線  $AC$  和  $BF$  的交點。可知

$$\angle PAE = \angle CBA = \angle BAC = \angle BFC.$$



評分標準：

解法一

- +4 PT: 證明  $APFE$  四點共圓。
  - +2 PT: 證明  $\angle ABC = \angle BAC$ ，或證明  $CA = CB$ 。
- +3 PT: 證明  $AB$  與  $EP$  平行。

解法二

- +4 PT: 證明  $APFE$  四點共圓。
  - +2 PT: 證明  $\angle AED = \angle ACD$ ，或證明  $ADCE$  共圓。
- +3 PT: 證明  $BD, AP, EF$  三線共點於根心  $C$ ，於是本題結論成立。

問題二. 證明  $r = 2$  為滿足以下條件的最大實數：對於一個正整數數列  $a_1, a_2, \dots$ ，若其滿足

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + ra_{n+1}}$$

對於所有正整數  $n$  都成立，則存在一個正整數  $M$ ，使得  $a_{n+2} = a_n$  對於所有  $n \geq M$  都成立。

**Problem 2.** Show that  $r = 2$  is the largest real number  $r$  which satisfies the following condition: If a sequence  $a_1, a_2, \dots$  of positive integers fulfills the inequalities

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + ra_{n+1}}$$

for every positive integer  $n$ , then there exists a positive integer  $M$  such that  $a_{n+2} = a_n$  for every  $n \geq M$ .

**解. 解答一：**我們首先證明  $r > 2$  是不可能的。令正整數  $a \geq 1/(r-2)$ 。考慮數列  $a_n = a + [n/2]$ ，則

$$\sqrt{a_n^2 + ra_{n+1}} > \sqrt{a_n^2 + ra_n} \geq \sqrt{a_n^2 + \left(2 + \frac{1}{a}\right)a_n} \geq a_n + 1 = a_{n+2} > a_n,$$

故數列  $a_n$  滿足題設不等式，但無法找到題目所要求的  $M$ 。故  $r > 2$  是不可能的。

我們接著證明  $r = 2$  滿足題意。歸謬證法，假設  $a_1, a_2, \dots$  滿足題設不等式，但存在  $m$  使得  $a_{m+2} > a_m$ 。若我們能證明

$$\forall k \geq 1, a_{m+2k} \leq a_{m+2k-1} = a_{m+1}, \quad (1)$$

則數列  $\{a_{m+2k} : k \geq 1\}$  有上界  $a_{m+1}$ ，故存在  $K$  使得此數列在  $a_{m+2K}$  達到其最大值。但由題設知  $a_n \leq a_{n+2}$ ，所以必有  $a_{m+2k} = a_{m+2K}$  對於所有  $k \geq K$  都成立，因此原題得證。

故我們僅需證明(1)成立；為此，我們採取數學歸納法。對於  $k = 1$ ，我們有

$$2a_{m+2} - 1 = a_{m+2}^2 - (a_{m+2} - 1)^2 \leq a_m^2 + 2a_{m+1} - (a_{m+2} - 1)^2 \leq 2a_{m+1}.$$

現在假設(1)在  $k$  時成立。由

$$a_{m+1}^2 \leq a_{m+2k+1}^2 \leq a_{m+2k-1}^2 + 2a_{m+2k} \leq a_{m+1}^2 + 2a_{m+1} < (a_{m+1} + 1)^2$$

我們知  $a_{m+2k+1} = a_{m+1}$ 。此外，基於歸納假設， $a_{m+2k} \leq a_{m+1}$ ，所以

$$a_{m+2k+2}^2 \leq a_{m+2k}^2 + 2a_{m+2k+1} \leq a_{m+1}^2 + 2a_{m+1} < (a_{m+1} + 1)^2,$$

因此  $a_{m+2k+2} \leq a_{m+1} = a_{m+2k+1}$ 。故由數學歸納法，(1)得證，從而原題得證。

**解答二：**我們用另一個方法證明(1)。假設數列  $\{a_n\}$  滿足題設。我們有以下觀察：

(a) 若  $a_{n+1} \leq a_n$ ，則

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + 2a_{n+1}} < \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 1} = a_{n+1},$$

故  $a_{n+2} = a_n$ 。

(b) 若  $a_n \leq a_{n+1}$ ，則

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + 2a_{n+1}} < \sqrt{a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} + 1} = a_{n+1} + 1,$$

故  $a_n \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$ 。

現在假設  $a_{m+2} > a_m$ ，則由以上觀察，我們必有  $a_m < a_{m+2} \leq a_{m+1}$ 。這表示(1)在  $k = 1$  時成立。

而若(1)在  $k$  成立，由 (a) 知  $a_{m+2k+1} = a_{m+2k-1} = a_{m+1}$ ，從而  $a_{m+2k} \leq a_{m+2k+1}$ 。又由 (b)，我們知  $a_{m+2k+2} \leq a_{m+2k+1} = a_{m+1}$ ，故由數學歸納法知(1)對所有  $k$  都成立。

**評分標準：**

- +3 PT: 證明  $r > 2$  時不成立。
  - +1 PT: 構造出  $r > 2$  時原題不成立之反例，但未加以證明。
- +3 PT: 證明  $r = 2$  時(1)成立。
  - +1 PT: 證明解答二的 (a) 與 (b) 中的其中一者。
  - +2 PT: 證明解答二的 (a) 與 (b) 但未證明(1)。
- +1 PT: 利用(1)證明當  $a_{m+2} > a_m$  時， $\{a_{m+2k}\}_{k=1}^{\infty}$  終為常數。

問題三. 請找出所有符合下列性質的正整數  $k$  : 存在某個正整數  $m$  和某個正整數子集  $S$  , 使得所有大於  $m$  的整數  $n$  , 都恰有  $k$  種方法能寫成  $S$  中相異元素的總和。

**Problem 3.** Determine all positive integers  $k$  for which there exist a positive integer  $m$  and a set  $S$  of positive integers such that any integer  $n > m$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  in exactly  $k$  ways.

**解.** We claim that  $k = 2^a$  for all  $a \geq 0$ .

**Solution 1.** Let  $A = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$  and  $B = \mathbb{N} \setminus A$ . For any set  $T$ , let  $s(T)$  denote the sum of the elements of  $T$ . (If  $T$  is empty, we let  $s(T) = 0$ .)

We first show that any positive integer  $k = 2^a$  satisfies the desired property. Let  $B'$  be a subset of  $B$  with  $a$  elements, and let  $S = A \cup B'$ . Recall that any nonnegative integer has a unique binary representation. Hence, for any integer  $t > s(B')$  and any subset  $B'' \subseteq B'$ , the number  $t - s(B'')$  can be written as a sum of distinct elements of  $A$  in a unique way. This means that  $t$  can be written as a sum of distinct elements of  $B'$  in exactly  $2^a$  ways.

Next, assume that some positive integer  $k$  satisfies the desired property for a positive integer  $m \geq 2$  and a set  $S$ . Clearly,  $S$  is infinite.

**Lemma.** For all sufficiently large  $x \in S$ , the smallest element of  $S$  larger than  $x$  is  $2x$ .

**Proof of Lemma.** Let  $x \in S$  with  $x > 3m$ , and let  $x < y < 2x$ . We will show that  $y \notin S$ . Suppose first that  $y > x + m$ . Then  $y - x$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  not including  $x$  in  $k$  ways. If  $y \in S$ , then  $y$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  in at least  $k + 1$  ways, a contradiction. Suppose now that  $y \leq x + m$ . We consider  $z \in (2x - m, 2x)$ . Similarly as before,  $z - x$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  not including  $x$  or  $y$  in  $k$  ways. If  $y \in S$ , then since  $m < z - y < x$ ,  $z - y$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  not including  $x$  or  $y$ . This means that  $z$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  in at least  $k + 1$  ways, a contradiction.

We now show that  $2x \in S$ ; assume for contradiction that this is not the case. Observe that  $2x$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  including  $x$  in exactly  $k - 1$  ways. This means that  $2x$  can also be written as a sum of distinct elements of  $S$  not including  $x$ . If this sum includes any number less than  $x - m$ , then removing this number, we can write some number  $y \in (x + m, 2x)$  as a sum of distinct elements of  $S$  not including  $x$ . Now

if  $y = y' + x$  where  $y' \in (m, x)$  then  $y'$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  including  $x$  in exactly  $k$  ways. Therefore  $y$  can be written as a sum of distinct elements of  $S$  in at least  $k + 1$  ways, a contradiction. Hence the sum only includes numbers in the range  $[x - m, x)$ . Clearly two numbers do not suffice. On the other hand, three such numbers sum to at least  $3(x - m) > 2x$ , a contradiction.  $\square$

From the Lemma, we have that  $S = T \cup U$ , where  $T$  is finite and  $U = \{x, 2x, 4x, 8x, \dots\}$  for some positive integer  $x$ . Let  $y$  be any positive integer greater than  $s(T)$ . For any subset  $T' \subseteq T$ , if  $y - s(T') \equiv 0 \pmod{x}$ , then  $y - s(T')$  can be written as a sum of distinct elements of  $U$  in a unique way; otherwise  $y - s(T')$  cannot be written as a sum of distinct elements of  $U$ . Hence the number of ways to write  $y$  as a sum of distinct elements of  $S$  is equal to the number of subsets  $T' \subseteq T$  such that  $s(T') \equiv y \pmod{x}$ . Since this holds for all  $y$ , for any  $0 \leq a \leq x - 1$  there are exactly  $k$  subsets  $T' \subseteq T$  such that  $s(T') \equiv a \pmod{x}$ . This means that there are  $kx$  subsets of  $T$  in total. But the number of subsets of  $T$  is a power of 2, and therefore  $k$  is a power of 2, as claimed.

**Solution 2.** We give an alternative proof of the first half of the lemma in the Solution 1 above.

Let  $s_1 < s_2 < \dots$  be the elements of  $S$ . For any positive integer  $r$ , define  $A_r(x) = \prod_{n=1}^r (1 + x^{s_n})$ . For each  $n$  such that  $m \leq n < s_{r+1}$ , all  $k$  ways of writing  $n$  as a sum of elements of  $S$  must only use  $s_1, \dots, s_r$ , so the coefficient of  $x^n$  in  $A_r(x)$  is  $k$ . Similarly the number of ways of writing  $s_{r+1}$  as a sum of elements of  $S$  without using  $s_{r+1}$  is exactly  $k - 1$ . Hence the coefficient of  $x^{s_{r+1}}$  in  $A_r(x)$  is  $k - 1$ .

Fix a  $t$  such that  $s_t > 2(m + 1)$ . Write

$$A_{t-1}(x) = u(x) + k(x^{m+1} + \dots + x^{s_t-1}) + x^{s_t}v(x)$$

for some  $u(x), v(x)$  where  $u(x)$  is of degree at most  $m$ .

Note that

$$A_{t+1}(x) = A_{t-1}(x) + x^{s_t}A_{t-1}(x) + x^{s_{t+1}}A_{t-1}(x) + x^{s_t+s_{t+1}}A_{t-1}(x).$$

If  $s_{t+1} + m + 1 < 2s_t$ , we can find the term  $x^{s_{t+1}+m+1}$  in  $x^{s_t}A_{t-1}(x)$  and in  $x^{s_{t+1}}A_{t-1}(x)$ .

Hence the coefficient of  $x^{s_{t+1}+m+1}$  in  $A_{t+1}(x)$  is at least  $2k$ , which is impossible. So  $s_{t+1} \geq 2s_t - (m+1) > s_t + m + 1$ .

Now

$$A_t(x) = A_{t-1}(x) + x^{s_t}u(x) + k(x^{s_t+m+1} + \dots + x^{2s_t-1}) + x^{2s_t}v(x).$$

Recall that the coefficient of  $x^{s_{t+1}}$  in  $A_t(x)$  is  $k-1$ . But if  $s_t + m + 1 < s_{t+1} < 2s_t$ , then the coefficient of  $x^{s_{t+1}}$  in  $A_t(x)$  is at least  $k$ , which is a contradiction. Therefore  $s_{t+1} \geq 2s_t$ .

### 評分標準：

- +2 PT: 證明所有形如  $k = 2^a$  的正整數皆滿足題設。
  - +1 PT: 證明某一個大於 1 的整數  $k$  滿足題設。
- +5 PT: 證明所有不是形如  $2^a$  的正整數  $k$  皆不滿足題設。
  - +3 PT: 證明 Lemma。
    - \* +2 PT: 證明對於所有足夠大的  $x \in S$ ，都有：若  $x < y < 2x$ ，則  $y \notin S$ 。
    - \* +1 PT: 證明對於所有足夠大的  $x \in S$ ，都有  $2x \in S$ 。
  - +2 PT: 在假設 Lemma 為真的情形下完成原題證明。

問題四. 令  $\mathbb{Z}$  表示所有整數形成的集合。找出所有符合下列性質的整係數多項式  $P(x)$  :

對於任何一個無窮整數數列  $a_1, a_2, \dots$  , 若  $\mathbb{Z}$  中的每一個整數在數列中都恰出現一次, 則存在下標  $i < j$  及整數  $k$  , 使得  $a_1 + a_{i+1} + \dots + a_j = P(k)$  。

**Problem 4.** Let  $\mathbb{Z}$  denote the set of all integers. Find all polynomials  $P(x)$  with integer coefficients that satisfy the following property:

For any infinite sequence  $a_1, a_2, \dots$  of integers in which each integer in  $\mathbb{Z}$  appears exactly once, there exist indices  $i < j$  and an integer  $k$  such that  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j = P(k)$ .

**解. Part 1.** All polynomials with  $\deg P = 1$  satisfy the given property.

Suppose  $P(x) = cx + d$ , and assume without loss of generality that  $c > d \geq 0$ . Denote  $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i \pmod{c}$ . It suffices to show that there exist indices  $i < j$  such that  $j - i \geq 2$  and  $s_j - s_i \equiv d \pmod{c}$ .

Consider  $c + 1$  indices  $e_1, e_2, \dots, e_{c+1} > 1$  such that  $a_{e_i} \equiv d \pmod{c}$ . By the pigeonhole principle, among the  $n + 1$  pairs  $(s_{e_1-1}, s_{e_1}), (s_{e_2-1}, s_{e_2}), \dots, (s_{e_{n+1}-1}, s_{e_{n+1}})$ , some two are equal, say  $(s_{m-1}, s_m)$  and  $(s_{n-1}, s_n)$ . We can then take  $i = m - 1$  and  $j = n$ .

**Part 2.** All polynomials with  $\deg P \neq 1$  do not satisfy the given property.

**Lemma.** If  $\deg P \neq 1$ , then for any positive integers  $A, B$ , and  $C$ , there exists an integer  $y$  with  $|y| > C$  such that no value in the range of  $P$  falls within the interval  $[y - A, y + B]$ .

**Proof of Lemma.** The claim is immediate when  $P$  is constant or when  $\deg P$  is even since  $P$  is bounded from below. Let  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  be of odd degree greater than 1, and assume without loss of generality that  $a_n > 0$ . Since  $P(x + 1) - P(x) = a_n n x^{n-1} + \dots$ , and  $n - 1 > 0$ , the gap between  $P(x)$  and  $P(x + 1)$  grows arbitrarily for large  $x$ . The claim follows.  $\square$

Suppose  $\deg P \neq 1$ . We will inductively construct a sequence  $\{a_i\}$  such that for any indices  $i < j$  and any integer  $k$  it holds that  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j \neq P(k)$ . Suppose that we have constructed the sequence up to  $a_i$ , and  $m$  is an integer with smallest magnitude yet to appear in the sequence. We will add two more terms to the sequence. Take  $a_{i+2} = m$ . Consider all the new sums of at least two consecutive terms; each of them contains  $a_{i+1}$ . Hence all such sums are in the interval  $[a_{i+1} - A, a_{i+1} + B]$  for fixed constants  $A, B$ . The lemma allows us to choose  $a_{i+1}$  so that all such sums avoid the range of  $P$ .

**Alternative Solution for Part 1.** Again, suppose  $P(x) = cx + d$ , and assume without loss of generality that  $c > d \geq 0$ . Let  $S_i = \{a_j + a_{j+1} + \cdots + a_i \pmod{c} \mid j = 1, 2, \dots, i\}$ . Then  $S_{i+1} = \{s_i + a_{i+1} \pmod{c} \mid s_i \in S_i\} \cup \{a_{i+1} \pmod{c}\}$ . Hence  $|S_{i+1}| = |S_i|$  or  $|S_{i+1}| = |S_i| + 1$ , with the former occurring exactly when  $0 \in S_i$ . Since  $|S_i| \leq c$ , the latter can only occur finitely many times, so there exists  $I$  such that  $0 \in S_i$  for all  $i \geq I$ . Let  $t > I$  be an index with  $a_t \equiv d \pmod{c}$ . Then we can find a sum of at least two consecutive terms ending at  $a_t$  and congruent to  $d \pmod{c}$ .

### Alternative Construction when $P(x)$ is constant or of even degree

If  $P(x)$  is of even degree, then  $P$  is bounded from below or from above. In case of  $P$  is constant or bounded from above, then there exists a positive integer  $c$  such that  $P(x) < c$ . Let  $\{a_i\}$  be the sequence

$$0, 1, -1, 2, 3, -2, 4, 5, -3, \dots$$

which is given by  $a_{3n+1} = 2n$ ,  $a_{3n+2} = 2n + 1$ ,  $a_{3n+3} = -(n + 1)$  for all  $n \geq 0$ . Notice that for any  $i < j$  we have  $a_i + \cdots + a_j \geq 0$ . Then for the sequence  $\{b_n\}$  defined by  $b_n = a_n + c$ , clearly  $b_i + \cdots + b_j \geq (a_i + \cdots + a_j) + 2c > c$  which is outside the range of  $P(x)$ .

Now if  $P$  is bounded from below, there exists a positive integer  $c$  such that  $P(x) > -c$ . In this case, take  $b_n$  to be  $b_n = -a_n - c$ . Then for all  $i < j$  we have  $b_i + \cdots + b_j \leq -(a_i + \cdots + a_j) - 2c < -c$  which is again outside the range of  $P(x)$ .

### 評分標準：

- +3 PT: 證明所有的一次多項式皆滿足題設性質。
- +4 PT: 證明所有的多項式其次數非一次者，皆不滿足題設性質。
  - +1 PT: 證明常數多項式皆不滿足題設性質。
  - +1 PT: 證明不是常數的偶數次多項式皆不滿足題設性質。

**問題五.** 令  $n \geq 3$  為一正整數。黑板上寫有  $n$  個 1。在黑板的下方有兩個水桶，在遊戲開始時是空的。每次行動時，從黑板上選取兩個數字  $a$  和  $b$ ，擦掉它們並改寫上 1 與  $a + b$ ，之後在第一個水桶裡放入 1 顆石頭，第二個水桶放入  $\gcd(a, b)$  顆石頭，其中  $\gcd(a, b)$  表  $a$  與  $b$  的最大公因數。經過有限次行動後，第一個水桶裡有  $s$  顆石頭，第二個水桶裡有  $t$  顆石頭，其中  $s$  和  $t$  為正整數。求  $\frac{t}{s}$  的所有可能值。

**Problem 5.** Let  $n \geq 3$  be a fixed integer. The number 1 is written  $n$  times on a blackboard. Below the blackboard, there are two buckets that are initially empty. A move consists of erasing two of the numbers  $a$  and  $b$ , replacing them with the numbers 1 and  $a + b$ , then adding one stone to the first bucket and  $\gcd(a, b)$  stones to the second bucket. After some finite number of moves, there are  $s$  stones in the first bucket and  $t$  stones in the second bucket, where  $s$  and  $t$  are positive integers. Find all possible values of the ratio  $\frac{t}{s}$ .

**解.** 答案為  $[1, n - 1)$  區間內的所有有理數。

我們先證明所有其他數字都是不可能的。首先，由於每次一號水桶增加一顆石頭時，二號水桶至少都會增加一顆石頭，故必然有  $t/s \geq 1$ 。另一方面，讓我們假設黑板上的數字被排成一橫列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，且在每一次行動，我們選擇其中兩個數字  $a$  和  $b$ ，將其中左邊的數字置換成 1，右邊的數字置換成  $a + b$ 。定義

$$q = 0 \times a_0 + 1 \times a_2 + \dots + (n - 1)a_n.$$

注意到  $s$  恆等於  $p - n$ ，其中  $p = \sum a_i$  為黑板上所有數字的總和。由於  $a_i$  都至少為 1，我們恆有

$$\begin{aligned} q &= (n - 1) \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n (k - 1)a_k \leq (n - 1)p - \sum_{k=1}^n (k - 1) \\ &= (n - 1)p - \frac{n(n - 1)}{2} = (n - 1)s + \frac{n(n - 1)}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

此外，若有一次行動選擇  $a_i$  與  $a_j (i < j)$ ，則  $t$  會增加  $\gcd(a_i, a_j) \leq a_i$ ，而  $q$  增加

$$(j - 1)(a_i + a_j - a_j) - (i - 1)(a_i - 1) = (j - 1)a_i - (i - 1)(a_i - 1) \leq ia_i - (i - 1)(a_i - 1) \geq a_i,$$

故  $q - t$  永不減少。

不失一般性，讓我們假設第一次行動選擇了最左邊的 1，則在第一次行動後， $q = 0 + 1 + \dots + (n - 2) + (n - 1) \times 2 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$  而  $t = 1$ 。故由  $q - t$  不減性與(2)，在第

一次行動之後，我們恆有

$$\begin{aligned} t &\leq q + 1 - \frac{(n+2)(n-1)}{2} \leq (n-1)s + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n+2)(n-1)}{2} + 1 \\ &= (n-1)s - (n-2) < (n-1)s, \end{aligned}$$

從而  $t/s < (n-1)$ 。故  $t/s \in [1, n-1)$ 。

我們接著證明  $[1, n-1)$  中的所有有理數都有可能達到；而由於第一次行動後， $t/s = 1$ ，故僅需證明  $(1, n-1)$  即可。為此，我們先證明以下引理：

**引理一：**對於所有正整數  $a$ ，我們總是能透過有限次行動，使得黑板上有  $n-1$  個 1 與 1 個  $a^{n-1}$ ，且  $t = a^{n-2}(a-1)(n-1)$ ， $s = a^{n-1} - 1$ 。

**證明：**我們對  $n$  使用數學歸納法。

- $n = 2$  時只需進行  $a - 1$  次行動即可。
- 假設  $n - 1$  時有操作  $A$  可以達到此狀況。則在  $n$  時，先對其中  $n - 1$  個 1 進行  $A$ ，使得黑板上剩下  $n - 1$  個 1 與  $a^{n-2}$ 。接著對  $n - 1$  個 1 再進行一次  $A$ ，這會讓黑板上剩下  $n - 2$  個 1 與兩個  $a^{n-2}$ 。再對兩個  $a^{n-2}$  進行一次行動，便讓黑板達到  $n - 1$  個 1 與一個  $2 * a^{n-2}$  的狀態。重複進行後兩步驟，最終就能讓黑板達到  $n - 1$  個 1 與一個  $a^{n-1}$  的狀態。

注意到這其中， $A$  會進行  $a$  次，而將兩個最大數字加總的動作  $B$  會進行  $a - 1$  次，故由歸納假設知  $s = a * (a^{n-2} - 1) + (a - 1) = a^{n-1} - 1$ 。又每一次進行  $A$  與  $B$ ， $t$  各會增加  $a^{n-3}(a-1)(n-2)$  與  $a^{n-2}$ ，故

$$t = a * a^{n-3}(a-1)(n-2) + (a-1) * a^{n-2} = a^{n-2}(a-1)(n-1).$$

至此，引理證畢。 □

回到原題，假設我們已經在引理一所述的狀態下。考慮行動  $C$ ：將 1 和黑板上最大的數字進行行動。每一次進行  $C$ ，都會在兩個桶子裡各放入一顆石頭。因此在進行  $b$  次後，我們有

$$\frac{t}{s} = \frac{a^{n-2}(a-1)(n-1) + b}{a^{n-1} - 1 + b}.$$

我們現在僅需證明，對於所有  $\frac{p}{q} \in (1, n-1)$ ，存在正整數  $a$  與  $b$  使得

$$\frac{p}{q} = \frac{a^{n-2}(a-1)(n-1) + b}{a^{n-1} - 1 + b}.$$

或著我們也可以將上式重寫為

$$b = \frac{qa^{n-2}(a-1)(n-1) - p(a^{n-1} - 1)}{p - q}.$$

但若我們取  $a \equiv 1 \pmod{p - q}$ ，則右式必為一整數。所以我們僅需確保分子大於零即可。注意到  $\frac{p}{q} \in (1, n - 1) \Rightarrow q(n - 1) - p > 0$ ，故

$$\begin{aligned} qa^{n-2}(a-1)(n-1) - p(a^{n-1} - 1) &> qa^{n-2}(a-1)(n-1) - pa^{n-1} \\ &= a^{n-2}(a(q(n-1) - p) - (n-1)), \end{aligned}$$

這在當  $a$  充分大時必為正值，故得證！ □

**上界的替代性證明方式：**讓我們改考慮以下等價敘述。黑板上一開始有無窮多個 1。每一次行動，我們擦掉兩個數字，並在黑板上寫下它們的和。黑板上在任何時候最多只能有  $n - 1$  個非 1 的數字。

假設經過一系列的操作後，黑板上有某個數字  $p$ 。將這個數字塗成紅色。現在讓我們回溯所有的操作，直到回復到全部都是 1 狀態。在回溯的過程中，每當有一個紅色的數字被分割成兩個數字時，將這兩個數字都塗成紅色。我們定義：

- $W_p$  為在這個回溯過程中，黑板上同時出現的大於 1 紅色數的最大數量。
- $S_p$  則定義為在這個回溯過程中，因為將紅色數字分割而從第二個桶子中被移除的石頭數量。

易知任何一個數字的寬度最大值為  $n - 1$ 。此外，任何一個瞬間，黑板上所有數字的分數總和必為  $t$ 。

讓我們證明：若  $W_p \leq w$ ，則  $S_p \leq (p - 1)w$ 。

- 對於  $p = 1$ ，顯然  $S_p = 0$ ，故得證。
- 若  $p > 1$ ，假設其分拆為  $a$  與  $b$ ，顯然  $W_a$  與  $W_b$  都不超過  $W_p \leq w$ 。除此之外，若  $W_a = w$ ，表示在回溯過程中，在某一步時，黑板上有  $w$  個紅色數來自於  $a$  的分割。這表示在這一步， $b$  不能分割出任何數字（否則  $W_p \geq w + 1$ 。）而在這之後的每一步，黑板上也勢必至少有一個數字來自於  $a$  的分割，所以  $W_b \leq w - 1$ （否則  $W_p$  再次  $\geq w + 1$ 。）從而， $W_a$  與  $W_b$  不能同為  $w$ 。

不失一般性假設  $W_a \leq w$  而  $W_b \leq w - 1$ ，則由歸納假設，我們有

$$\begin{aligned} S_p &= S_a + S_b + \gcd(a, b) \leq (a - 1)W_a + (b - 1)W_b + \gcd(a, b) \\ &\leq (a - 1)w + (b - 1)(w - 1) + b = (p - 1)w + 1 - w \leq (p - 1)w. \end{aligned}$$

歸納得證。

現在，對於每個數字  $p$ ， $W_p \leq n - 1$ ，從而  $S_p \leq (p - 1)(n - 1)$ 。又若此時黑板上所有數字的集合為  $\mathbb{P}$ ，則  $t = \sum_{p \in \mathbb{P}} W_t \leq \sum_{p \in \mathbb{P}} (n - 1)(p - 1)$ ，而  $s = \sum_{p \in \mathbb{P}} (p - 1)$ ，故  $\frac{t}{s} < n - 1$ 。

**評分標準：**

- +3 PT: 證明  $\frac{t}{s} < n - 1$ 。
  - +1 PT: 在特定的  $n \geq 3$  下證明上界。
- +4 PT: 證明所有  $\frac{t}{s} \in (1, n - 1)$  皆可被達到。
  - +1 PT: 在特定的  $n \geq 3$  下證明上述性質。
  - +1 PT: 證明對於任何  $a$ ，可在有限步達到  $n - 1$  個 1 與 1 個  $a^{n-1}$ 。