2019 年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題解答

2018 年 12 月 1 日 上午 10:00 ∼ 12:00

說明: 本試題共兩頁七題, 每題七分。
將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號處。
答錯不倒扣, 未完全答對者, 不給分。
答案卡填答注意事項: 答案的數字位數少於填答空格數時, 請適度地在前面填入0.

一、(7分) 在 ΔABC 中 $\angle B = 90°$, 線段 $AB > BC$. 今有 ΔA_iBC $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 與 ΔABC 相似 (頂點不一定對應)。試問 $n + 2018$ 的最大值爲 $\underline{①②③④}$
答 $n = 2030$ 或 $n = 2029$.

二、(7分) 將 $1, 2, \cdots, 2018$ 這 2018 個數任意排成一列, 得到一個數 A.
試問: 以 3 除 A 的餘數爲多少? 答 $\underline{⑤}$.
答 0

三、(7分) ΔABC 爲銳角三角形, H 爲垂心。射線 AH, BH, CH 分別交 ΔABC 的外接圓於點 A', B', C'. 試問:

$$\frac{⑥}{⑦} \le \frac{AH}{AA'} + \frac{BH}{BB'} + \frac{CH}{CC'} < \frac{⑧}{⑨}.$$

(評分標準: 下界 3 分; 上界 4 分) 答: $\frac{3}{2} \le \frac{AH}{AA'} + \frac{BH}{BB'} + \frac{CH}{CC'} < \frac{2}{1}$.

四、數列 $\{a_n\}$ 定義如下:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + n^2},\ \ n = 1, 2, \cdots.$$

(1) (2分) 試問 $[a_{2019}] = \underline{⑩⑪⑫⑬}$.
答 2018.

(2) (5分) 試問 $[a_1^2] + [a_2^2] + \cdots + [a_{20}^2] = \underline{⑭⑮⑯⑰}$.

此處, $[x]$ 表示不大於實數 x 的最大整數。
答 2643.

五、 試求最小正整數 n, 使得任意 n 個正整數集合 A 中都有 15 個元素且其和皆能被 15 整除。答: 最小正整數 $n = \underline{⑱⑲}$
答 29.

六、(7分) 令 $\mathbb{N}$ 表示所有正整數的集合。函數 $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 滿足: 對任意兩個相異的正整數 a, b 有

$$f(a) + f(b) - f(a+b) = 2019.$$

(1) (2分) 試問 $f(0) = \underline{⑳㉑㉒㉓}$
答: 2019

(2) (5分) 設 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 是 100 個兩兩相異的正整數, 試求
$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{100}) - f(a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}) = \underline{㉔㉕㉖㉗㉘㉙}$
答: 199881.

七、(7分) 設正整數 k 滿足 $1 < k < 100$. 對 $1, 2, \cdots, 100$ 的任一個排列 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$, 取最小的 $m > k$, 使 a_m 至少小於 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中 $(k-1)$ 個數。已知滿足 $a_m = 1$ 的數列個數爲 $\dfrac{100!}{4}$. 假設 k 的值爲 a 或 b $(a < b)$. 試問: $a = \underline{㉚㉛}$; $b = \underline{㉜㉝}$.
(評分標準: 只答對一個答案 3 分)。答: $a = 45$, $b = 55$.