

第 33 屆亞太數學奧林匹亞 (APMO) 競賽試題

問題一. 證明：對每一個實數 $r > 2$ ，恰有 2 或 3 個正實數 x 滿足方程式 $x^2 = r[x]$ 。

註： $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。

Problem 1. Prove that for each real number $r > 2$, there are exactly two or three positive real numbers x satisfying the equation $x^2 = r[x]$.

Note: $[x]$ denotes the largest integer less than or equal to x .

問題二. 對多項式 P 及正整數 n , 令 P_n 代表滿足 $a < b \leq n$ 且 $|P(a)| - |P(b)|$ 被 n 整除的正整數數對 (a, b) 的數量。試決定對全部正整數 n 都有 $P_n \leq 2021$ 的所有整係數多項式 P 。

Problem 2. For a polynomial P and a positive integer n , define P_n as the number of positive integer pairs (a, b) such that $a < b \leq n$ and $|P(a)| - |P(b)|$ is divisible by n . Determine all polynomial P with integer coefficients such that $P_n \leq 2021$ for all positive integers n .

問題三. 設 $ABCD$ 為圓內接凸四邊形，圓 Γ 為其外接圓。令點 E 為對角線 AC 與 BD 的交點，點 L 為同時與邊 AB, BC, CD 相切的圓的圓心，並令點 M 為 Γ 上不含點 A 與 D 的 BC 弧的中點。

證明：三角形 BCE 中，對應角 E 的旁心落於直線 LM 上。

Problem 3. Let $ABCD$ be a cyclic convex quadrilateral and Γ be its circumcircle. Let E be the intersection of the diagonals AC and BD , let L be the center of the circle tangent to sides AB, BC , and CD , and let M be the midpoint of the arc BC of Γ not containing A and D . Prove the excenter of triangle BCE opposite E lies on the line LM .

問題四. 給定一個 32×32 的方格桌，我們將一隻老鼠放在最左下角的格子中，使其面向上方，並在其他一些格子中放入起司。配置完成後老鼠開始移動，其移動模式如下：老鼠會一直朝前方移動，直到它走到有起司的格子；此時牠會咬該格起司的一小部分，向右轉，再繼續向前移動。我們稱某些含有起司的格子形成好子集，若且唯若老鼠在移動過程中，牠可以恰咬到這些格子裡的起司各一口，然後牠就走到桌子外面了。證明：

- (a) 沒有任何好子集是由 888 個格子所組成。
- (b) 存在一個含有至少 666 個格子的好子集。

Problem 4. Given a 32×32 table, we put a mouse (facing up) at the bottom left cell and a piece of cheese at several other cells. The mouse then starts moving. It moves forward except that when it reaches a piece of cheese, it eats a part of it, turns right, and continues moving forward. We say that a subset of cells containing cheese is good if, during this process, the mouse tastes each piece of cheese exactly once and then falls off the table. Show that:

- (a) No good subset consists of 888 cells.
- (b) There exists a good subset consisting of at least 666 cells.

問題五. 試找出所有函數 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, 滿足對所有整數 a 與 b , $f(f(a) - b) + bf(2a)$ 為完全平方數。

Problem 5. Determine all functions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ such that $f(f(a) - b) + bf(2a)$ is a perfect square for all integers a and b .

