



2022 年亞太數學奧林匹亞競賽 試卷

考試時間：2022年3月15日

中華民國國際數理學科奧林匹亞競賽

考試地點：國立高雄師範大學

諮詢委員會數學工作小組試題組提供

注意事項：

- (1)本試卷共五題，每題滿分七分。
- (2)考試時間：4 小時(9:30 - 13:30)。
- (3)所有計算紙必須連同試卷繳回。
- (4)不可使用計算器、修正液(帶)。
- (5)計算紙可再索取，試卷本、提問單每人限一份。

缺考(由監考人員畫記)

	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題
初閱得分					
初閱簽名					
複閱得分					
複閱簽名					

第 34 屆亞太數學奧林匹亞 (APMO) 競賽試題

問題一. 試找出所有的正整數數對 (a, b) , 滿足 a^3 是 b^2 的倍數, 並且 $b - 1$ 是 $a - 1$ 的倍數。

註: 對整數 m, n 而言, 若存在一整數 k 使得 $n = km$, 則稱 n 是 m 的倍數。

Problem 1. Find all pairs (a, b) of positive integers such that a^3 is a multiple of b^2 and $b - 1$ is a multiple of $a - 1$.

Note. An integer n is said to be multiple of an integer m if there is an integer k such that $n = km$.

問題二. 設 ABC 為直角三角形，其中 $\angle B = 90^\circ$ 。點 D 落在直線 CB 上，並且 B 位於 D, C 兩點之間。設 E 為 AD 中點，並設 F 是 $\triangle ACD$ 的外接圓與 $\triangle BDE$ 的外接圓的第二個交點。試證：無論 D 如何變動，直線 EF 必通過一定點。

Problem 2. Let ABC be a right triangle with $\angle B = 90^\circ$. Point D lies on the line CB such that B is between D and C . Let E be the midpoint of AD and let F be the second intersection point of the circumcircle of $\triangle ACD$ and the circumcircle of $\triangle BDE$. Prove that as D varies, the line EF passes through a fixed point.

問題三. 試找出所有正整數 $k < 202$ ，使得存在一正整數 n 滿足

$$\left\{ \frac{n}{202} \right\} + \left\{ \frac{2n}{202} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{kn}{202} \right\} = \frac{k}{2},$$

其中 $\{x\}$ 指的是 x 的小數部分。

註：定義實數 x 的小數部分為使得 $x - k$ 為整數且 $0 \leq k < 1$ 的實數 k 。

Problem 3. Find all positive integers $k < 202$ for which there exists a positive integer n such that

$$\left\{ \frac{n}{202} \right\} + \left\{ \frac{2n}{202} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{kn}{202} \right\} = \frac{k}{2},$$

where $\{x\}$ denote the fractional part of x .

Note. The fractional part of a real number x is defined as the real number k with $0 \leq k < 1$ such that $x - k$ is an integer.

問題四. 設 n 及 k 為正整數。某甲進行以下遊戲。他拿到 n 顆石頭與 k 個盒子，其中石頭分別編號為 1 到 n 。一開始所有石頭都在其中一個盒子內。遊戲的每回合，某甲選擇一個盒子，將裡面編號最小的石頭（其編號為 i ）拿出來，再把它放到任意一個空盒子或者含有編號 $i + 1$ 石頭的盒子內。遊戲持續進行下去，若某時刻有一個盒子內只有編號為 n 的石頭，就判定某甲獲勝。試決定所有的整數對 (n, k) 使得某甲有獲勝的方法。

Problem 4. Let n and k be positive integers. Cathy is playing the following game. There are n marbles and k boxes, with the marbles labelled 1 to n . Initially, all marbles are placed inside one box. Each turn, Cathy chooses a box and then moves the marbles with the smallest label, say i , to either any empty box or the box containing marble $i + 1$. Cathy wins if at any point there is a box containing only marble n . Determine all pairs of integers (n, k) such that Cathy can win this game.

問題五. 設實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ 。試決定 $(a - b)(b - c)(c - d)(d - a)$ 的最小值，並找出所有得到該最小值的 (a, b, c, d) 數值。

Problem 5. Let a, b, c, d be real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Determine the minimum value of $(a - b)(b - c)(c - d)(d - a)$ and determine all values of (a, b, c, d) such that the minimum value is achieved.

