2023 年亞太數學奧林匹亞初選考試（二）試題

比賽日期：2023 年 2 月 1 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題, 每題滿分七分

問題一. 已知正整數 n 可以被寫成若干個正整數的乘積，且這若干個正整數的和爲 2023。試求 n 的最大可能值。

Problem 1. A positive integer n is the multiple of several positive integers that sum up to 2023. Find the maximum possible value of n.

問題二. 請找出 $x^3+y^3-12xy=13$ 的所有正整數解 x, y。

Problem 2. Find all positive integers x, y such that $x^3+y^3-12xy=13$.

問題三. 五十張卡片上各寫了 1 或 -1 的其中一個數字。你每次可以選擇三張卡片，並獲知此三張卡片上數字的乘積。試求最小的正整數 n，使得你存在一個策略，能保證在至多 n 次問題後得知全部卡片上的數字總乘積？

Problem 3. 1 or -1 is written on each of the 50 cards. Each turn, you may choose three of the cards, and you will be told the product of the numbers on those cards. Find the minimum positive integer n so that you have a strategy guaranteed to find the product of all of the 50 numbers within n turns.

問題四. 數列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 滿足：

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{1+a_k^2}, \quad k \geq 1. \tag{$\star$}$$

令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$。

(i) 證明：存在兩個正數 $C_1 < C_2$，使得

$$C_1 \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq C_2 \tag{$\star\star$}$$

對所有的正整數 n 都成立。

(ii) 試求 S_{2n^2+3n} 的整數部分 (以 n 的函數表示)。

Problem 4. Let the sequence $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisfy

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{1+a_k^2}, \quad k \geq 1. \tag{$\star$}$$

Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

(i) Prove that there exist constants $C_2 > C_1 > 0$ such that

$$C_1 \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq C_2 \tag{$\star\star$}$$

for all positive integers n.

(ii) Find the integer part of S_{2n^2+3n} (as a function of n.)

問題五. 平面上有一點 A 在圓 ω 上，另有一點 X 在圓 ω 外。過點 X 作一直線 ℓ，設 ℓ 與 ω 交於兩點 B, C。令點 H 爲三角形 ABC 的垂心。試證：平面上存在一點 Y，滿足 $HA^2 + HY^2$ 爲一個與直線 ℓ 無關的定值。

Problem 5. On the Euclidean plane, a point A is on circle ω, while a point X is outside of ω. Let ℓ be a straight line passing through X, and suppose ℓ and ω intersect at points B and C. Let H be the orthocenter of triangle ABC. Prove that there exists a point Y on the plane so that $HA^2 + HY^2$ is a fixed value independent of the choice of ℓ.