2023 年亞太數學奧林匹亞競賽
試卷

考試時間：2023年3月14日　　中華民國國際數理學科奧林匹亞競賽

考試地點：國立高雄師範大學　　諮詢委員會數學工作小組試題組提供

注意事項：

(1)本試卷共五題，每題滿分七分。

(2)考試時間：4 小時(9:30 - 13:30)。

(3)所有計算紙必須連同試卷繳回。

(4)不可使用計算器、修正液(帶)。

(5)計算紙可再索取，試卷本、提問單每人限一份。

☐ 缺考(由監考人員畫記)

	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題
初閱得分					
初閱簽名					
複閱得分					
複閱簽名					

第 35 屆亞太數學奧林匹亞 (APMO) 競賽試題

問題一. 令 $n \geq 5$ 為正整數。考慮 n 個實心正方形，其邊長分別為 1, 2, …, n。將它們排在平面上，使得它們的邊與 x 軸、y 軸平行，並且讓任兩個正方形都不相交，或者只能在其頂點上碰到。證明可以適當地安排這些正方形，使得每一個正方形恰好碰到其它兩個正方形。

Problem 1. Let $n \geq 5$ be an integer. Consider n squares with side lengths $1, 2, \ldots, n$, respectively. The squares are arranged in the plane with their sides parallel to the x and y axes. Suppose that no two squares touch, except possibly at their vertices.

Show that it is possible to arrange these squares in a way such that every square touches exactly two other squares.

問題二. 找出所有整數 n，滿足 $n \geq 2$ 且 $\dfrac{\sigma(n)}{p(n)-1} = n$。其中 $\sigma(n)$ 代表 n 的所有正因數總和，$p(n)$ 代表 n 的最大質因數。

Problem 2. Find all integers n satisfying $n \geq 2$ and $\frac{\sigma(n)}{p(n)-1} = n$, in which $\sigma(n)$ denotes the sum of all positive divisors of n, and $p(n)$ denotes the largest prime divisor of n.

問題三. 設 $ABCD$ 為平行四邊形。點 W, X, Y, Z 分別在邊 AB, BC, CD, DA 上，滿足三角形 AWZ, BXW, CYX, DZY 的內心們形成平行四邊形。證明 $WXYZ$ 是平行四邊形。

Problem 3. Let $ABCD$ be a parallelogram. Let W, X, Y, and Z be points on sides AB, BC, CD, and DA, respectively, such that the incenters of triangles AWZ, BXW, CYX, and DZY form a parallelogram. Prove that $WXYZ$ is a parallelogram.

問題四. 令 $\mathbb{R}_{>0}$ 為所有正實數的集合，並給定一個正實數 $c > 0$。找出所有函數 $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$，滿足：對所有 $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$，有

$$f((c+1)x + f(y)) = f(x+2y) + 2cx.$$

Problem 4. Let $c > 0$ be a given positive real and $\mathbb{R}_{>0}$ be the set of all positive reals. Find all functions $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ such that

$$f((c+1)x + f(y)) = f(x+2y) + 2cx \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

問題五. 平面上有 n 條線段，任三條不共點，但任兩條都在其內部相交。東東與他的 $2n-1$ 位朋友分別選擇這些線段的端點站好，任兩人所站的端點皆不相同。對於他的每位朋友，東東想要用以下的程序送耶誕禮物給對方：

首先，他對每一條線段指定某一個端點為「匯點」。然後，他將禮物擺在他所在的端點，並使禮物依下列規則移動：

- 如果禮物在某條線段上，則它朝向匯點移動。
- 當禮物來到兩條線段的交點時，它會換到另一條線段移動，朝向新的匯點前進。

當禮物到達某個端點時，在那個端點的朋友就可以收到這個禮物。證明這 $2n-1$ 位朋友中，恰有 n 位可以收到東東送的禮物。

Problem 5. There are n line segments on the plane, no three intersecting at a point, and each pair intersecting once in their respective interiors. Tony and his $2n-1$ friends each stand at a distinct endpoint of a line segment. Tony wishes to send Christmas presents to each of his friends as follows:

First, he chooses an endpoint of each segment as a "sink". Then he places the present at the endpoint of the segment he is at. The present moves as follows:

- If it is on a line segment, it moves towards the sink.
- When it reaches an intersection of two segments, it changes the line segment it travels on and start moving towards the new sink.

If the present reaches an endpoint, the friend on that endpoint can receive their present. Prove that Tony can send presents to exactly n of his $2n-1$ friends.