2021 年台灣數學奧林匹亞考試試題

比賽日期：2021 年 2 月 3 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題, 每題滿分七分

問題一. 試求滿足下列條件的最大正整數 K:

> 任給有限多個長度皆為 1 的閉區間 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ (N 為任意正整數)。若其聯集為 $[0, 2021]$，則我們必定可以在 $A_1, \ldots, A_N$ 中找到 K 個兩兩交集皆為空集合的區間。

問題二. 找出所有的整數 $n = 2k+1 > 1$，使得存在某個 $\{0, 1, \ldots, k\}$ 的排列 $a_0, a_1, \ldots, a_k$，滿足

$$a_1^2 - a_0^2 \equiv a_2^2 - a_1^2 \equiv \cdots \equiv a_k^2 - a_{k-1}^2 \pmod{n}.$$

問題三. 令 n 為一正奇數。平面上的整點集 $C=\{(i,j)\colon i,j=0,1,\ldots,2n-1\}$ 構成一個 $2n\times 2n$ 的陣列，每個點上各有一隻天竺鼠，各自面向 x 軸正向、x 軸負向、y 軸正向或 y 軸負向中的其中一個方向。傑夫想要保留其中 n^2+1 隻天竺鼠，並將其餘天竺鼠移除。接著天竺鼠們作以下運動：在每一回合，被保留的每一隻天竺鼠同時往牠所面向的方向前進一單位長，並保持其面向；但如果一隻天竺鼠要前進的點 $(i,j)\notin C$, 則牠改為前進到 $(p,q)\in C$, 其中 $p\equiv i \pmod{2n}$ 而 $q\equiv j \pmod{2n}$（舉例來說，如果一隻天竺鼠從 $(2,0)$ 爬向 $(2,-1)$，則牠改為爬到 $(2,2n-1)$。）傑夫的目標是讓所有留下來的天竺鼠，在任何一回合都不會有兩隻天竺鼠有相同的終點，也不會有兩隻天竺鼠互相爬到對方該回合的起點。

試證：不論起始天竺鼠的面向如何分布，傑夫總是可以達成目標。

問題四. 設 I 為三角形 ABC 的內心，D 為 I 關於邊 BC 的垂足。設 D' 為 D 關於 I 的對稱點並且滿足 $\overline{AD'} = \overline{ID'}$。以 D' 為圓心，作圓 Γ 過 A, I 並交 AB, AC 於 X, Y。設 Z 為 Γ 上一點滿足 AZ 垂直 BC。

證明：$AD, D'Z, XY$ 共點。

問題五. 設 n 是一個給定的正整數。某甲和某乙進行一個遊戲：甲決定一個不超過 n 次的整係數多項式 $P(x)$，但是不告訴乙；乙的目標是決定是否存在一個整數 k 使得 $P(x) = k$ 沒有整數解。乙可以進行下述的詢問：乙給甲一個常數 c，甲就會告訴乙有幾個整數 t 滿足 $P(t) = c$；每次詢問需要花一塊錢。試問乙至少要付多少錢，才能保證達成他的目標？