

2022 年台灣數學奧林匹亞考試試題

比賽日期：2022 年 2 月 19 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題, 每題滿分七分

問題一. 設 x, y, z 為三正整數, x, y, z 的最大公因數為 1, 且具有下列性質:

$$x \mid yz(x + y + z),$$

$$y \mid xz(x + y + z),$$

$$z \mid xy(x + y + z),$$

$$x + y + z \mid xyz.$$

證明 $xyz(x + y + z)$ 是一個完全平方數。

問題二. 有編號 1 到 2022 的黑球各一顆被裝在 1011 個黑盒子裡，使得每個黑盒子裡都恰有兩顆黑球。另有編號 1 到 2022 的白球各一顆被裝在 1011 個白盒子裡，使得每個白盒子裡都恰有兩顆白球。試證：不論一開始的黑球與白球如何分配，我們都能從這 2022 個盒子中各取出一顆球，使得取出的 2022 顆球包含編號 1 到 2022 的球各一顆。

問題三. 找出所有函數對 $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 使得對於所有 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 等式

$$|f(a, b) - f(c, d)| + |g(a, b) - g(c, d)| = |a - c| + |b - d|$$

恆成立。

問題四. 桌面上有 2022 個容量為 200cc 的奶瓶，每瓶都裝有 30cc 的奶。A 寶與 B 寶玩一個遊戲，由 A 寶開始，兩個寶寶輪流進行回合。在某個寶寶的回合，該寶寶從以下兩個行動中擇一進行：

- (i) 選擇一個裝有多於 100cc 的奶的奶瓶，並將瓶內一半的奶喝掉；
- (ii) 選擇兩個各裝有至多 100cc 的奶的奶瓶，將其中一瓶的奶全部倒進另一瓶中，然後把空瓶丟掉。

先不能進行行動的寶寶輸掉遊戲。試問哪一個寶寶有必勝法？

問題五. 設 J 為銳角三角形 ABC 的 A -旁心。在三角形 ACJ 的外接圓上取兩點 X, Y 使得 $\overline{JX} = \overline{JY} < \overline{JC}$ 。在 XY 上取一點 P 使得 PB 與三角形 ABC 的外接圓相切。在三角形 BXY 的外接圓上取一點 Q 使得 BQ 平行於 AC 。

證明： $\angle BAP = \angle QAC$ 。