

2023 年台灣數學奧林匹亞考試試題

比賽日期：2023 年 2 月 8 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題，每題滿分七分

問題一. 令 n 與 m 為正整數。托兒所的老師用 $n \times m$ 塊正方形巧拼，排成一個 $n \times m$ 的長方形區域。每塊巧拼上有一個嬰兒，各自面向正方形的某一個邊。老師一拍手，所有嬰兒就同時往其面對的方向前進一塊巧拼，之後所有嬰兒原地順時鐘轉 90 度。若一個嬰兒爬出 $n \times m$ 的長方形區域，則該嬰兒大哭。若兩個嬰兒前進到相同的巧拼上，他們會對撞然後一起大哭。

已知老師可以適當安排一開始每個嬰兒的面向，使得不論老師拍多少次手，都沒有嬰兒大哭。
試求 n 與 m 的所有可能值。

問題二. 試求所有同時滿足以下兩條件的正整數 n :

(a) n 的正因數個數不是 8 的倍數 ;

(b) 對於所有整數 x , 有

$$x^n \equiv x \pmod{n}.$$

問題三. 平面上設點 O 為圓 Γ 的圓心，另在 Γ 上有兩點 A, B 滿足 O, A, B 不共線。設點 M 為線段 AB 的中點，並分別在直線 OA, OB 上取點 P, Q 使得 $P \neq A$ 且 P, M, Q 三點共線。令過 P 與 AB 平行的直線，和過 Q 與 OM 平行的直線交於點 X ；又令過 X 與 OA 平行的直線，和過 B 與 OX 垂直的直線交於點 Y 。證明：若點 X 在圓 Γ 上，則點 Y 也在圓 Γ 上。

問題四. 令 n 與 k 爲正整數。令 A 爲由平面上 $2n$ 個相異點所構成的集合，其中任三點不共線。
 A 中的若干對點之間有連線，使得平面上有 $n^2 + k$ 條相異線段。試證：平面上至少有 $\frac{4}{3}k^{3/2}$ 個
相異三角形，其頂點皆屬於 A ，且其三邊皆爲上述所連線段。

問題五. m 爲正整數，且實數 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 滿足

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i = 1,$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i^2 = 11,$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i^3 = 1,$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i^4 = 131.$$

試證明 m 必爲 7 的倍數。