2024 年 EGMO 競賽初選考試 初選考試試題

考試時間：2023 年 10 月 1 日上午 10:00 ～ 12:00

本試題共兩頁，分成四部分：代數、組合、幾何與數論。每部分皆有四道題目。

注意事項：

- 請用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 填答時，若答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。
- 填答時，若答案爲分數，請以最簡分數作答。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

一、代數

1. 設方程式 $x^3-3x^2+6x-7=0$ 的三根爲 α,β,γ，而三次方程式 $f(x)=0$ 的三根爲 $\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\alpha$，且 $f(x)$ 的最高次項係數爲 1。則 $f(1)=$ ①②③。
2. 有若干個正整數，它們的和爲 25，則這些正整數的乘積的最大可能值爲④⑤⑥⑦。
3. $f(x)$ 爲一多項式。已知對於任意實數 x，皆有 $xf(x)f(1-x)+x^3+100\geq 0$。則 $f(1)$ 的最大可能值爲⑧。
4. 設 k 爲正實數，滿足：對於任意正實數 $x\geqslant y>0$，皆有 $\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\leqslant\frac{(x-y)^2}{ky}$，則 k 的最大可能值爲 ⑨ 。

二、組合

1. 小朋友要下 12 階樓梯，每一步他可以下 1 階或 2 階樓梯，且過程中不會倒退。則小朋友共有⑩ ⑪ ⑫ 種不同的下樓梯走法。

2. 有一個 6×6 的方格紙。我們將其中的三個格子塗黑，使得沒有兩個黑格子在同一排或同一列上。則滿足以上條件的塗法共有 ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ 種。

3. 圓上有 12 個點。現在以這 12 個點爲頂點畫出 N 個六邊形，使得當對於這 12 個點中的任意 5 個，都存在一個六邊形，使得這 5 個點都是這個六邊形的頂點。則 N 的最小可能值爲 ⑰ ⑱ ⑲。

4. 某國有 100 座城市，其中 N 對城市之間有雙向航班。已知對於任三座城市，其中必有兩個城市之間沒有航班。求 N 的最小可能值爲 ⑳ ㉑ ㉒ ㉓。

三、幾何

1. 直角三角形 ABC 中角 C 爲直角，$\overline{AB}=5$ 且 $\overline{AC}=3$。令 D 爲 $\overline{BC}$ 上的一點，E 爲 $\overline{AB}$ 上的一點，使得 $DE\perp AB$。已知 $\frac{CD}{DE}=2$，則 $\frac{BD}{CD}=\frac{㉔}{㉕}$。

2. $ABCD$ 爲圓內接四邊形，其四邊長分別爲 $AB=9,\ BC=12,\ CD=6,\ DA=4$。設射線 $\overrightarrow{BA}$ 與射線 $\overrightarrow{CD}$ 交於點 P。則 $PA+PD=\frac{㉖\ ㉗}{㉘}$。

3. 平面上有一個直角三角形 ABC，其中三邊長分別爲 $AB=13,\ BC=12,\ CA=5$。現作兩個半徑相等的圓 O_1,O_2 使得 O_1 與邊 AB,BC 相切，O_2 與邊 AB,CA 相切，而兩圓又互相外切。則圓 O_1 的半徑爲 $\frac{㉘\ ㉙}{㉚\ ㉛}$。

4. ABC 爲一三角形，其中 $AB:AC:BC=3:5:7$。令 I 爲 ABC 的內心，直線 AI 交 ABC 外接圓於另一點 D。則 $\frac{ID}{AD}=\frac{㉜}{㉝}$。

四、數論

1. n 爲正整數，且 $2^{112}+2^{2023}+2^n$ 爲完全平方數。則 n 的最大可能值爲 ㉞ ㉟ ㊱ ㊲。

2. 令 $d(n)$ 爲整除 n 的最大奇數，而 $S(n)=\sum_{i=1}^{n}d(i)$。若 $S(2^k)\geq 2^{113}$，則 k 的最小可能值爲 ㊳ ㊴。

3. 令 $N=5^{120}-1$，則在 N 的標準分解式中，2 的次方數爲 ㊵。

4. 令 $N=111\cdots111$ 爲一個 113 位整數，其中的每一位數都是 1。則 N 除以 23 的餘數爲 ㊶ ㊷。

2024 年 EGMO 競賽初選考試 初選考試參考答案

一、代數

1. 答案：-33

   由根與係數知 $\alpha+\beta+\gamma=3$，$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=6$ 且 $\alpha\beta\gamma=7$。從而有
   $$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)+(\alpha\beta)(\beta\gamma)+(\alpha\gamma)(\beta\gamma)=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=3\times 7=21,$$
   $$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\beta\gamma)=(\alpha\beta\gamma)^2=7^2=49.$$
   故由根與係數知 $f(x)=x^3-6x^2+21x-49$，因此 $f(1)=-33$。

2. 答案：$2^2\times 3^7=8748$

   令這些正整數爲 $a_1,a_2,\cdots,a_n$。首先當 $a_i\geq 4$ 時，有 $2\times(a_i-2)\geq a_i$，故可以不失一般性假設 $a_i\leq 3$。又若 $a_i=1$，有 $a_ia_j\leq a_j+1$，故可以不失一般性假設 $a_i\in\{2,3\}$。又因爲 $3^2\geq 2^3$，因此 2 的數量至多爲 2，從而因 $2\times 2+3\times 7=25$ 知 $2^2\times 3^7$ 爲最大值。

3. 答案：6

   假設 f 爲 k 次多項式，並令 $g(x)=xf(x)f(1-x)+x^3+100$。

   - 若 $k=0$，則 g 爲 3 次多項式，必可取到負值。
   - 若 $k\geq 2$，則 g 爲 $2k+1$ 次多項式，必可取到負值。
   - 若 $k=1$，令 $f(x)=ax+b$，則 g 之 x^3 項係數爲 $(1-a^2)$，故 $a=\pm 1$，從而有 $g(x)=x^2+b(b\pm 1)x+100$。由於 $g(x)\geq 0$，必有 $b^2(b\pm 1)^2-400\leq 0$，因此 $-20\leq b(b\pm 1)\leq 20$。分 Case 討論知 $b\in[-5,4]$ 或 $b\in[-4,5]$，故 b 的最大可能值爲 5，因此 $f(1)$ 的最大可能值是 $1+5=6$。

4. 答案：8

   令 $x=a^2y$，則原不等式等價於
   $$\frac{(a-1)^2}{2}=\frac{(a^2+1)}{2}-a\leq\frac{(a^2-1)^2}{k}=\frac{(a-1)^2(a+1)^2}{k}\Rightarrow\quad (a+1)^2\geq k/2.$$
   由於這必須對所有 $a\geq 1$ 都成立，故 $k/2\leq(1+1)^2=4$。

二、組合

1. 答案：233。
令 F_n 為下到第 n 階的所有走法數。注意到走到第 $n+2$ 步的方法數，等於走到第 $n+1$ 階的方法數，加上走到第 n 階後直接走到第 $n+2$ 階的方法數（也就是沒有踏到第 $n+1$ 階），也就是 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$。又 $F_1=1$，$F_2=2$，故由費氏數列，$F_{12}=233$。

2. 答案：2400。
等價於從 $\{1,2,\cdots,6\}$ 中選三個數字，再從 $\{1,2,\cdots,6\}$ 中選三個數字，然後將第一組數字與第二組數字一一對應，這樣的方式共有 $C_3^6\times C_3^6\times 3!=2400$。

3. 答案：132。
讓我們考慮選一個六邊形再選其五個頂點的所有方法，這 $6N$ 種方法會選到全部十二個點選五個點的 C_5^{12} 種組合各至少一次，故 $6N\geq C_5^{12}\Rightarrow N\geq 132$。

4. 答案：$(100/2)^2=2500$。一般性地，考慮有 n 座城市的圖。由於此圖沒有三完全子圖，由圖倫定理，此圖邊的上界為 $\left(1-\frac{1}{3-1}\right)\times\frac{n^2}{2}=\left(\frac{n}{2}\right)^2$。構造上，只要將城市分為等數量的兩組 A 與 B，並讓 A 的每個城市連接 B 的每個城市即可。

三、幾何

1. 答案：5/6。
由正弦定義知
$$\frac{BD}{CD}=\frac{DE/\sin\angle DBE}{CD}=\frac{DE}{CD}\times\frac{1}{\sin\angle ABC}=\frac{DE}{CD}\times\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$$

2. 答案：15/2。
令 $PA=x$，$PD=y$。因圓內接四邊形對頂角互補，有 PAD 與 PCB 相似，知 $PA:PD:AD=PC:PB:BC$，也就是
$$\frac{x}{y+6}=\frac{y}{x+9}=\frac{1}{3},$$
聯立方程可得 $x+y=15/2$。

3. 答案：26/17。

   設圓半徑為 x，圓 O_2 切 AC、AB 為 E、D，直線 AC 與 DO_2 交於 F，則顯然有 $EO_2F \backsim CAB$。又因 $O_2D = O_2E = x$，由以上相似形知 $O_2F = \frac{AB}{AC}O_2E = \frac{13}{5}x$，因此 $FD = \frac{18}{5}x$。又因為 $ADF \backsim ACB$，故 $AD = \frac{AC}{BC}DF = \frac{3}{2}x$。

   又令 O_2 切 AB 於 D'，則相同的相似形操作可得 $BD' = 5x$。這表示 $13 = AB = BD' + DD' + AD = \frac{17}{2}x$，故 $x = \frac{26}{17}$。

4. 答案：7/8。

   由餘弦定理知 $\angle BAC = 120^o$，從而 $\angle CBD = \angle CAD = \angle CAB/2 = 60^o$。又因為 $\angle CAD = \angle BAD$，從而 $BD = CD$，故 BCD 為正三角形，因此 $BD = CD = 7$。又由托勒密定理知 $AB \times CD + AC \times BD = AD \times BC$，得 $AD = 8$。最後由雞爪定理知 $ID = CD = 7$，故 $ID/AD = 7/8$。

四、數論

1. 答案：3932。

   $2^{112} + 2^{2023} + 2^n$ 為平方數表示 $1 + 2 \times 2^{1910} + 2^{n-112}$ 為平方數，從而 $n - 112$ 的最大值為 $1910 \times 2 = 3820$，故 n 的最大值為 3932。

   若要嚴格證明此為最大值，注意到當 $n > 112$ 時，$1 + 2 \times 2^{1910} + 2^{n-112} \in \left((2^{(n-112)/2})^2, (2^{(n-112)/2} + 1)^2\right)$，從而不合。

2. 答案：58。一般性地，我們有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^k} d(i) =& \{d(1)+d(3)+\cdots+d(2^k-1)\} \\
& + \{d(2\times 1)+d(2\times 3)+\cdots+d(2\times(2^{k-1}-1))\} \\
& + \{d(2^2\times 1)+d(2^2\times 3)+\cdots+d(2^2\times(2^{k-2}-1))\} \\
& \vdots \\
& + \{d(2^{k-2}\times 1)+d(2^{k-2}\times 3\} \\
& + d(2^{k-1})+d(2^k) \\
=& \{1+3+\cdots+(2^k-1)\} \\
& \{1+3+\cdots+(2^{k-1}-1)\} \\
& \vdots \\
& + \{1+3\}+1+1 \\
=& \sum_{i=1}^{2^{k-1}}(2i-1)+\sum_{i=1}^{2^{k-2}}(2i-1)+\cdots+\sum_{i=1}^{2^0}(2i-1)+1 \\
=& (2^{k-1})^2+(2^{k-2})^2+\cdots+1+1=(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+1)+1=\frac{4^k-1}{3}+1=\frac{4^k+2}{3}.
\end{aligned}
$$

又

$$\frac{4^k+2}{3}\geq 2^{113}\Rightarrow(4^k+2)\geq 3\times 2^{113}=\frac{3}{2}4^{57},$$

故 k 的最小可能值爲 $57+1=58$。

3. 答案：5。

由 Lifting-the-exponent Lemma,

$$v_2(5^{120}-1)=v_2(5-1)+v_2(5+1)+v_2(120)-1=2+1+3-1=5.$$

4. 答案：19。

由費馬小定理知 $10^{22}\equiv 1$，而直接計算可知 $10^{11}\equiv -1$，因此連續 22 個 1 會被 23 整除。又由於 $113\equiv 3 \mod 22$，故原數 $\equiv 111\equiv 19$。