2025 年 EGMO 競賽初選考試 初選考試試題

考試時間：2024 年 9 月 21 日上午 10:00 ～ 12:00

一般性資訊：

- 本試題共三頁（含本頁），共十六題。
- 題目分成四個領域：代數、組合、幾何與數論。各領域的四道題目大致依照其在領域內的難度順序排列。
- 各題皆獨立計分；答題時**不需**依照題號順序作答。

注意事項：

- 請用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 填答時，若答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。
- 填答時，若答案爲分數，請以最簡分數作答。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

一、代數

1. 設 a,b 爲整數。若多項式 ax^8+bx^7+1 爲 x^2-x-1 的倍式，則 $a=\underline{①②③}$.

2. 設 $0^\circ < A \leqslant B < 180^\circ$。已知

$$\sin A+\sin B=\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \text{且} \qquad \cos A+\cos B=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

則 $A=\underline{④⑤}^\circ$.

3. 假設對於任意正實數 x、y 和 z，皆有

$$\frac{(x+y+z)^6}{x^1y^2z^3}\geq c$$

則 c 的最大可能值爲$\underline{⑥⑦⑧}$.

4. 已知 $P(x)$ 是一個 114 次多項式，且 $P(k)=\frac{k}{k+1}$ 對於 $k=0,1,\cdots,114$，皆成立。若 $P(115)=\frac{114}{b}$，則 $b=\underline{⑨⑩⑪}$.

二、組合

1. 在 $1,2,3,4,5,6,7$ 的所有排列 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ 中，同時滿足

$$a_1>a_2>a_3$$
$$a_5>a_4>a_3$$

的排列有 $\underline{⑫⑬⑭}$ 種。

2. 令集合 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. 則滿足 $f(f(x))=x$ 對所有 $x\in S$ 皆成立的函數 $f:S\to S$ 有 $\underline{⑮⑯⑰}$ 個。

3. 令 n 爲正整數。已知對於任意 2025 個相異正整數，我們都能從中取出 n 個正整數，使得這 n 個正整數中任意兩者的差被 29 整除。則 n 的最大可能值爲 $\underline{⑱⑲}$.

4. 某次考試共有 n 題。我們知道：

   (a) 每一題都恰有 3 個學生答對；

   (b) 對於任兩題，都恰有 1 個學生兩題都答對；

   (c) 沒有學生答對所有題目。

   則 n 的最大可能值爲 $\underline{⑳㉑}$.

三、幾何

1. 等腰三角形 ABC 中，底邊 $\overline{BC}=6$。若三角形 ABC 的內切圓半徑為 1，則其外接圓半徑等於 $\dfrac{㉒㉓}{㉔}$（以最簡分數表示）。

2. 平面上三個圓分別以 A、B、C 為圓心，半徑分別為 4、5、6。此三圓兩兩外切，其切點分別為 D、E、F。則 $\Delta DEF/\Delta ABC=\dfrac{㉕}{㉖㉗}$（以最簡分數表示）。

3. 令 $\triangle ABC$ 為一正三角形，P 為其內點，使得 $\angle APB=150^\circ$。已知 $\overline{AP}=8\sqrt{3}$ 而 $\overline{BP}=8$，則 $\overline{CP}=$ ㉘㉙.

4. 令 $\triangle ABC$ 為一三角形，P 為其內點。令 $\vec{AP}$、$\vec{BP}$、$\vec{CP}$ 分別交 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 於 D、E 與 F。已知 $\overline{AP}=6$，$\overline{BP}=9$，$\overline{PD}=6$，$\overline{PE}=3$ 且 $\overline{CF}=20$。則 $\triangle ABC$ 的面積為 ㉚㉛㉜.

四、數論

1. 令 n 為正整數。若 $\frac{n-7}{5n+6}$ **不是**最簡分數，則 n 的最小可能值為 ㉝㉞.

2. 設正整數 x 不超過 1000，且 x 除以 7 餘 3、x 除以 11 餘 5 、x 除以 13 餘 6。則 $x=$ ㉟㊱㊲.

3. 令 p 為質數，滿足 57^p+1 被 p 整除。則 p 的所有可能值的總和為 ㊳㊴.

4. 令 x 和 n 為正整數，使得 x^n+2^n+1 整除 $x^{n+1}+2^{n+1}+1$。則 x 的最大可能值為 ㊵㊶.

2024 年 EGMO 競賽初選考試 初選考試參考答案

一、代數

1. 答案：-13

   注意到當 $x^2-x-1 \mid ax^{n+2}+bx^{n+1}+1$，則我們有

   $$x^2-x-1 \mid (ax^{n+2}+bx^{n+1}+1)-(ax^{n+2}-ax^{n+1}-ax^n)=(a+b)x^{n+1}+ax^n+1.$$

   換言之，如果我們令 $F_0=b$，$F_1=a$ 且 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，則 $F_nx^{9-n}+F_{n-1}x^{8-n}+1$ 恆爲 x^2-x-1 的倍式。而由於此式在 $n=7$ 時是二次式且末項爲 1，故我們必有 $F_7=-1$ 與 $F_6=1$。倒推即可得 $a=F_1=-13$。

2. 答案：15

   首先有 $\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B=3/2$ 與 $\cos^2 A+2\cos A\cos B+\cos^2 B=1/2$，相加後得到

   $$2\cos(A-B)=\left(\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B\right)+\left(\cos^2 A+2\cos A\cos B+\cos^2 B\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2,$$

   因此 $B=90^\circ+A$。代回第一式，我們有 $\sin A+\cos A=\sqrt{3/2}$，平方後得 $1+2\sin A\cos A=3/2$，也就是 $\sin(2A)=1/2$。這表示 $2A=30^\circ$，因此 $A=15^\circ$。

3. 答案：432

   由算幾不等式，

   $$(x+y+z)^6=\left(x+2\times\frac{y}{2}+3\times\frac{z}{3}\right)^6\geq\frac{6^6}{2^2 3^3}x^1y^2z^3=432$$

   且等號於 $x=y/2=z/3$ 時成立，故最大可能的 $c=432$。

4. 答案：116

   令 $Q(x)=(x+1)P(x)-x$，則 $Q(x)$ 是一個 115 次的多項式且 $Q(0)=Q(1)=\cdots=Q(114)=0$，故存在常數 c 使得

   $$Q(x)=c\prod_{k=0}^{114}(x-k).$$

   又由定義知

   $$1=(-1+1)P(-1)-(-1)=Q(-1)=c\prod_{k=0}^{114}(-1-k)=-c\times 115!,$$

故 $c=-1/115!$。故

$$116\times P(115)-115=Q(115)=\frac{-1}{115!}\prod_{k=0}^{114}(115-k)=-1,$$

也就是 $P(115)=(115-1)/116=114/116$。

二、組合

1. 答案：252

   考慮從 7 個數字中選出 a_1 到 a_5 的 C^7_5 種方法；注意到這五個數字中，最小的必定是 a_3，而 (a_1,a_2) 的可能性則有 C^4_2 種，且此兩者決定後 (a_4,a_5) 便被唯一決定。再搭配 (a_6,a_7) 的 2! 種組合，總計有 $C^7_4\times C^4_2\times 2!=252$ 種組合。

2. 答案：764

   讓我們令 S_n 爲從 $\{1,2,\cdots,n\}$ 映射到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 且滿足 $f(f(x))=x$ 的函數個數。顯然 $S_1=1$，$S_2=2$。現在，對於一般性的 n，考慮 $f(n)$：

   - 若 $f(n)=n$，則將 f 限縮在 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 上的函數仍滿足 $f(f(x))=x$，而這樣的函數個數爲 S_{n-1}；
   - 若 $f(n)=m$，則必須有 $f(m)=n$。此時，將 f 限縮在 $\{1,2,\cdots,n\}-\{m,n\}$ 上的函數仍滿足 $f(f(x))=x$，而這樣的函數個數爲 S_{n-2}。

   以上表示 $S_n=S_{n-1}+(n-1)S_{n-2}$，直接遞迴操作可得 $S_8=764$。

   出題者（林延輯）註記：這是 involution number I_n, 滿足 $I_0=I_1=1$ 及遞迴 $I_n=I_{n-1}+(n-1)I_{n-2}$

3. 答案：70

   首先證明 $n=70$ 可行。考慮 mod 29 的同餘系。由於 $2025/70\approx 69.8$，故由鴿籠原理，必存在 70 個數字對 29 同餘，故其任兩者之差被 29 整除。

   接著證明 $n=71$ 不可行。由於 $2025<70\times 29$，我們可以取 2025 個數字，使得其中在任何一個 mod 29 同餘系中的數字都致多 70 個。此時任取 71 個數字，都必然存在兩個數字屬於不同的同餘系，而其差必不被 29 整除。

4. 答案：07

   首先構造 $n=7$ 的情況。考慮有七名考生，各答對第

$$(1,2,3),(1,4,5),(1,6,7),(2,4,6),(2,5,7),(3,4,7),(3,5,6)$$

題，則其滿足所有條件。

接著證明當 $n \geq 8$ 時，若 (a) 與 (b) 成立，則 (c) 不會成立。採取反證法，假設其中答對最多題的人答對了 $k < n$ 題。如果 $k \geq 4$，不失一般性假設他答對前四題，而沒有答對第 n 題。如此一來，依照條件 (b)，我們必須要有人答對 $(1,n)$、$(2,n)$、$(3,n)$ 與 $(4,n)$，且這四個人必全相異 (否則會有一組 (i,j) 有至少兩個人答對，矛盾)。但如此一來，第 n 題會有至少四個人答對，依然矛盾。因此 $k \leq 3$。

現在，讓我們以題做點，將有被單一學生同時答對的點相連線作圖 $G(V,E)$，則由 $k \leq 3$ 知此圖中所有點的 degree 都小於 6，因而由度邊定理知 $|E| \leq 6n/2 = 3n$。但另一方面，(b) 要求 G 是完全圖，而完全圖的邊數是 $n(n-1)/2$，因此我們必須要有 $3n \geq n(n-1)/2$，而這在 $n \geq 8$ 時矛盾。

選題者 (高竹嵐) 註記：至少需要有算兩次的能力。圖論部分僅是爲方便說明，非必要。

三、幾何

1. 答案：25/8。

令內心爲 I，內切圓在 BC 與 AC 上的切點分別爲 D 和 E。由於 $\triangle AIE \backsim \triangle ACD$，有 $\overline{AI} : \overline{EI} = \overline{AC} : \overline{CD}$。再結合 $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = (\overline{AI}+1)^2 + 3^2$，得 $\overline{AI} = 5/4$，也就是 $\overline{AD} = 9/4$。再令 O 爲 ABC 外心，則我們有外接圓半徑 $\overline{AO} = \overline{CO} = \sqrt{\overline{DO}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \overline{AO}^2\right) + 9}$，得 $\overline{AO} = 25/8$.

出題者 (林延輯) 註記：亦可以利用 $\angle ACD = 2\angle ICD$ 與 $\tan\angle ICD = \overline{ID}/\overline{CD}$，以 tan 的倍角公式求得 $\overline{AD}$，再透過 $Rr = abc/4S$ 求解。

2. 答案：8/33。一般性的，若三圓之半徑爲 p、q 和 r，則我們有

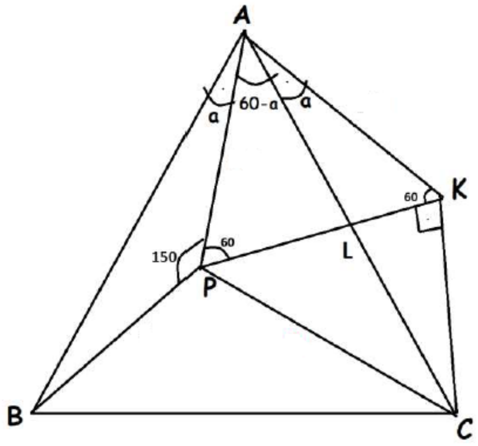
$$\begin{aligned}\frac{\Delta DFE}{\Delta ABC} &= 1 - \left(\frac{\Delta ADF}{\Delta ABC} + \frac{\Delta BED}{\Delta ABC} + \frac{\Delta CFE}{\Delta ABC}\right)\\ &= 1 - \left\{\frac{p^2}{(r+p)(p+q)} + \frac{q^2}{(p+q)(q+r)} + \frac{r^2}{(q+r)(r+P)}\right\}\\ &= \frac{(p+q)(q+r)(r+p) - p^2(q+r) - q^2(r+p) - r^2(p+q)}{(p+q)(q+r)(r+p)} = \frac{2pqr}{(p+q)(q+r)(r+p)}\end{aligned}$$

3. 答案：16

令 K 爲將 P 對著 A 旋轉 60^o 所得的點，則 $APB \cong AKC$，故 $\angle AKC = \angle APB = 150^o$。又 APK 爲正三角形，故 $\angle AKP = 60^o$，從而 $\angle PKC = 90^o$。因此

$$\overline{PC}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 16^2$$

也就是 $\overline{PC}=16$



4. 答案：108

首先，令 $[AEP]=a,[AFP]=b,$ 和 $[ECP]=c.$ ，則有 $\frac{[AEP]}{[BPD]}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow[BPD]=3[AEP]=3a$。此外，$\frac{[ABP]}{[BPD]}=\frac{6}{6}=1\Leftrightarrow[ABP]=3a$。類似地，我們有 $[CPD]=a+c.$

現在，注意到 $\frac{[BPC]}{[PEC]}=\frac{9}{3}=3\Leftrightarrow\frac{(3a)+(a+c)}{c}=3\Leftrightarrow c=2a$，從而 $\frac{[APC]}{[AFP]}=\frac{[BPC]}{[BFP]}=\frac{PC}{FP}\Leftrightarrow\frac{3a}{b}=\frac{6a}{3a-b}\Leftrightarrow a=b$。代入此值，我們得 $\frac{FC}{FP}=3\Leftrightarrow PC=15,FP=5.$

現在，由於 $\frac{[AEP]}{[PEC]}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$, 有 $2AE=EC$. 設定 $AC=b$, 從而對三角形 APC 應用 Stewart 定理，得 $(15)(15)(\frac{b}{3})+(6)(6)(\frac{2b}{3})=(\frac{2b}{3})(\frac{b}{3})(b)+(b)(3)(3)$. 計算後知 $b=\sqrt{405}\Leftrightarrow AE=\frac{b}{3}=\sqrt{45}$. 但由於 $3^2+6^2=45$，我們有 $\angle APE=90\Leftrightarrow[APE]=\frac{(6)(3)}{2}=9=a$。

綜以上，$[ABC]=a+a+2a+2a+3a+3a=12a=(12)(9)=108$。

選題者（高竹嵐）註記：有西瓦與其他各種作法，但都需要一些競賽級的幾何定理。

四、數論

1. 答案：48

由輾轉相除法知 $gcd(n-7,5n+6)=gcd(41,n-7)$，而 41 是質數，故最小可能 n 是 $41+7=48$。

2. 答案：500

注意到若答案爲 x，則 $2x+1$ 除以 7、11、13 都餘 0，故 $7\times11\times13|2x+1$。

結合 $1 \le x < 1000$，我們知 $x = 500$。

組題者（高竹嵐）註記：當然也可以用中國剩餘定理慢慢算。

3. 答案：$31 = 2 + 29$。

顯然 $57 \nmid 57^{57} + 1$，故 $gcd(p, 57) = 1$。此時由費馬小定理，$57^p + 1 \equiv 57 + 1 \equiv 0 \mod p$，因此有 $p | 58 = 2 \times 29$，也就是 $p = 2, 29$。

4. 答案：11。事實上，(x, n) 的所有可能解爲 $(4, 1)$ 與 $(11, 1)$。

- $n = 1$：$x + 3 \mid x^2 + 5 \iff \dfrac{x^2+5}{x+3} = x - 3 + \dfrac{14}{x+3} \in \mathbb{Z} \iff x + 3 \mid 14$。因此，$x + 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$ 這意味著 $x = 4$ 和 $x = 11$ 是正整數解。
- $n \ge 2$：
  - $x = 1$：$2^n + 2 \mid 2^{n+1} + 2 \Rightarrow 2^{n-1} + 1 \mid 2^n + 1 \Rightarrow 2^{n-1} + 1 \mid 2(2^{n-1} + 1) - 1$ 這是不可能的。
  - $x \ge 2$：注意到 $x^n + 2^n + 1$ 整除 $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$ 當且僅當 $x^n + 2^n + 1$ 整除 $x(x^n + 2^n + 1) - (x^{n+1} + 2^{n+1} + 1) = (x-2)(2^n + 1) + 1 > 0$。因此，我們必須有

    $$x^n + 2^n + 1 \le (x-2)(2^n + 1) + 1.$$

    對於 $x = 2$，這變成 $x^n + 2^n + 1 \le 1$，矛盾。

    對於 $x = 3$，這變成 $3^n + 2^n + 1 \le 2^n + 2 \Rightarrow 3^n = 1 \Rightarrow n = 0$ 不是一個正整數，矛盾。