

## 2025 亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試 (一) 試題

考試時間：2024 年 11 月 09 日上午 10:00 ~ 12:00

說明：本試題共兩頁，分成兩部分：選填題與非選擇題。

作答方式：

- 選填題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用藍、黑色原子筆在「答案卷」上作答；更正時可使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

### 第一部分：選填題

說明：本部分共有五題，每題七分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

答案卡填答注意事項：答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。

1. 你參加一款新手機遊戲的活動。你每天的忠誠度是成等差數列的整數，每天的黏著效益也是成等差數列的整數，而你每天登入能獲得的寶石數量是你當天的忠誠度乘以黏著效益。已知你第一、二、三天登入時，各自獲得 390、840 與 1210 顆寶石。則你第 11 天登入時獲得的寶石數量為 ①②③④。
2. 三角形  $ABC$  之三邊長分別為  $AB = 8$ ， $BC = 10$ ， $AC = 9$ 。  $AC$  之中垂線交  $BC$  於  $D$ ，則  $CD$  的長度為  $\frac{⑤⑥}{⑦⑧}$ （化為最簡分數）。
3. 已知正實數  $a, b, c$  滿足  $a + 2b + 3c = 1$ ，則  $\log_6 a + 2^3 \log_6 \left(\frac{b}{2^2}\right) + 3^3 \log_6 \left(\frac{c}{3^2}\right)$  的最大可能值為 ⑨⑩⑪。

4. 有一個  $3 \times 3$  的棋盤，我們在每一格中填入一個數字，使得 1 到 9 的九個數字各出現一次。定義以下兩個值：

- 考慮每一**直排**的**最大**數字，並令  $a$  為這三者中**最小**者。
- 考慮每一**橫列**的**最小**數字，並令  $b$  為這三者中**最大**者。

則讓  $a = b = 4$  的填法共有 ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ 種。

5. 小智有 8 隻神奇寶貝。他希望能出戰  $n$  次對決，每次對決他需要派出 4 隻神奇寶貝，使得存在正整數  $m$  讓任兩隻神奇寶貝都在恰好  $m$  次對決中同時出戰。則  $n$  的最小可能值為 ⑰ ⑱。

## 第二部分：非選擇題

說明：每題 7 分。答案必須寫在「答案卷」上，並標明題號，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用藍、黑色原子筆書寫，除幾何作圖外不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。

一、令  $ABC$  為一銳角三角形。作點  $A_1$  使得  $A_1BC$  為以  $A_1$  為頂角，且與  $ABC$  不重疊的等腰直角三角形。同理，作點  $B_1$  與  $C_1$ ，使得  $AB_1C$  與  $AC_1B$  分別為以  $B_1$  與  $C_1$  為頂角，且皆與  $ABC$  不重疊的等腰直角三角形。證明  $AA_1, BB_1, CC_1$  三線共點。

二、找出所有正整數對  $(a, b)$ ，使得  $a^2 + a + b$  是  $ab + b + 3$  的倍數。

# 2025 APMO Taiwan Preliminary Round 1

10:00–12:00, November 09, 2024

## General instructions.

- There are 2 pages of problems, consisting of fill-in problems and non-multiple-choice problems.
- Use 2B pencils to answer fill-in problems on the designated card. Use erasers only to make corrections for these, do not use correction tape/fluid.
- Use pens in blue or black ink to answer non-multiple-choice problems on the designated sheet of paper. Correction tape/fluid may be used to make corrections for this part.
- Contestants are held responsible for the consequences from failing to follow the instructions above so that the machine cannot read the designated card, or the answers for non-multiple-choice problems are illegible.
- Protractors, calculators and other electronic devices are prohibited.
- One sheet of paper for the non-multiple-choice problems is given to each contestants. No more supply is offered.

## Part 1. Fill-in problems

**Instruction** There are FIVE problems in this Part. Each problem is worth 7 points. There is no penalty for wrong answers. No marks will be awarded for answers that are not completely correct.

If the number of digits for the answers is less than the number of designated spaces, fill in a proper number of 0's at the beginning of your answer.

1. You participate in an event of a new mobile game. Your daily loyalties are integers forming an arithmetic progression, and so do your daily adhesion benefits. The number of gems you earn each day upon logging in is equal to your loyalty for that day multiplied by the adhesion benefit. It is known that you receive 390, 840 and 1210 gems on the first, second and third days, respectively. Then you receive ①②③④ on the 11th day.

2. Triangle  $ABC$  has side lengths  $AB = 8$ ,  $BC = 10$  and  $AC = 9$ . Let the perpendicular bisector of  $AC$  intersect  $BC$  at  $D$ . Then the length of  $CD$  is  $\frac{\textcircled{5}\textcircled{6}}{\textcircled{7}\textcircled{8}}$  (in simplest fraction).
3. Positive real numbers  $a, b, c$  satisfies  $a + 2b + 3c = 1$ . Then, the maximum possible value of  $\log_6 a + 2^3 \log_6 \left(\frac{b}{2^2}\right) + 3^3 \log_6 \left(\frac{c}{3^2}\right)$  is  $\underline{\textcircled{9}\textcircled{10}\textcircled{11}}$ .
4. We fill an integer in each cell of a  $3 \times 3$  chessboard so that each of the integers from 1 to 9 appears exactly once. Define the following quantities:
- consider the **largest** number in each of the rows, and let  $a$  be the **minimum** of the three;
  - consider the **smallest** number in each of the columns, and let  $b$  be the **maximum** of the three.

Then there are exactly  $\underline{\textcircled{12}\textcircled{13}\textcircled{14}\textcircled{15}\textcircled{16}}$  ways to fill in the numbers so that  $a = b = 4$ .

5. Ketchum has 8 pokemons. He wishes to enter  $n$  duals, where he needs to assign 4 pokemons for each of the duals so that any pair of two pokemons is assigned together in exactly  $m$  of the duals for some positive integer  $m$ . Then the smallest possible  $n$  is  $\underline{\textcircled{17}\textcircled{18}}$ .

## Part 2. Non-multiple-choice problems

**Instruction** There are TWO problems in this part. Each problem is worth 7 points. Answers should be written in blue or black ink, except for graphics that can be drawn by pencil. The problem number should be indicated clearly. The intermediate steps and reasons should be clearly stated, or penalty in deduction of points will be incurred.

- I. Let  $ABC$  be an acute triangle. Let  $A_1BC$  be an isosceles right triangle not overlapping  $ABC$  with  $A_1$  be its apex. Similarly, let  $AB_1C$  and  $ABC_1$  be isosceles right triangles not overlapping  $ABC$  with  $B_1$  and  $C_1$  be their apexes, respectively. Prove that lines  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  are concurrent.
- II. Find all pairs of positive integers  $(a, b)$  such that  $a^2 + a + b$  is a multiple of  $ab + b + 3$ .

## 2025 年亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試 (一)

### 選擇題參考解答

1. 答案：1290

解答：令兩個等差數列首項分別為  $a$  和  $b$ ，公差分別為  $s$  和  $t$ ，則第  $n$  天的寶石數量  $f(n) = ab + (s+t)(n-1) + st(n-1)^2$ 。代入  $f(1) = 390$ ， $f(2) = 840$  與  $f(3) = 1210$ ，得  $f(n) = 390 + 490(n-1) - 40(n-1)^2$ ，因此  $f(11) = 390 + 490 \times 10 - 40 \times 10^2 = 1290$ 。

2. 答案：90/13

解答：過  $B$  作  $AC$  之垂足  $E$ ，由  $AE^2 + BE^2 = AB^2$  與  $CE^2 + BE^2 = (AC - AE)^2 + BC^2$ ，求得  $AE = \frac{5}{2}$ ，故  $CE = \frac{13}{2}$ 。又令  $AC$  中點為  $M$ ，則  $\triangle BEC \cong \triangle DMC$ ，因此

$$\frac{DC}{BC} = \frac{MC}{EC} = \frac{9/2}{13/2} = \frac{9}{13} \Rightarrow DC = \frac{9}{13}BC = \frac{90}{13}$$

最後由於  $MD$  是  $AC$  中垂線，知  $AD = CD = 90/13$ 。

3. 答案：-72

解答：由算幾不等式，

$$\frac{1}{36} = \frac{a + 2^3 \frac{b}{2^2} + 3^3 \frac{c}{3^2}}{36} \geq \left( a \times \left( \frac{b}{2^2} \right)^8 \times \left( \frac{c}{3^2} \right)^{27} \right)^{1/36}.$$

因此

$$\text{原式} = \log_6 \left( a \times \left( \frac{b}{2^2} \right)^8 \times \left( \frac{c}{3^2} \right)^{27} \right) \leq \log_6 \left( \frac{1}{36} \right)^{36} = -72.$$

4. 答案：25920

解答：

- (a) 首先選一格填入 4，這有 9 種填法。
- (b) 4 必須是所在直排最大值，這表示要在該直排的剩餘兩格中填入  $\{1, 2, 3\}$  中的兩個。這有 6 種填法。
- (c) 4 同時必須是所在橫列的最小值，這表示  $\{1, 2, 3\}$  中還沒填的那一個不能跟 4 在同一橫列，因此有 4 格可以填。這有 4 種填法。
- (d) 剩下的五個數字就可以隨便填了，共 5! 種填法。

故總填法有  $9 \times 6 \times 4 \times 5! = 25920$ 。

5. 答案：14

令  $S_{A,B}$  為  $A$  和  $B$  同時出戰的場次數， $S = \sum S_{A,B}$ 。以下算兩次：

(a) 從神奇寶貝對的角度，由於每一對神奇寶貝的同時出場次數都一樣，因此  
 $S = C_2^8 S_{A,B} = 28S_{A,B}$ ;

(b) 從場次的角度，由於每一場會提供  $C_2^4 = 6$  個配對數，因此  $S = 6n$ 。

這表示  $28S_{A,B} = S = 6n$ ，也就是  $n = \frac{14S_{A,B}}{3}$ 。又因為  $S_{A,B}$  與  $n$  皆為正整數，因此  $n \geq \frac{14 \times 3}{3} = 14$ 。

最後，以下是  $n = 14$  的構造：

$(A, B, C, D), (A, B, E, F), (A, B, G, H), (C, D, E, F), (C, D, G, H),$

$(E, F, G, H), (A, C, E, G), (B, D, F, H), (A, C, F, H), (B, D, E, G),$

$(A, D, E, H), (B, C, F, G), (A, D, F, G), (B, C, E, H)$

## 2025 年亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試 (一)

### 非選擇題參考解答

一、令  $A_1A$ 、 $B_1B$ 、 $C_1C$  分別交  $BC$ 、 $AC$ 、 $AB$  於  $D$ 、 $E$ 、 $F$ 。由正弦定理，我們有

$$\frac{BD}{\sin BA_1D} = \frac{A_1D}{\sin A_1BD} = \frac{A_1D}{\sin A_1CD} = \frac{CD}{\sin CA_1D}.$$

同樣由正弦定理，我們有

$$\frac{AB}{\sin BA_1A} = \frac{AA_1}{\sin ABA_1}, \quad \frac{AC}{\sin CA_1A} = \frac{AA_1}{\sin ACA_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin BA_1A}{\sin CA_1A} = \frac{AB \sin ABA_1}{AC \sin ACA_1}.$$

結合  $\angle BA_1D = \angle BA_1A$  與  $\angle CA_1D = \angle CA_1A$ ，我們得

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\sin BA_1A}{\sin CA_1A} = \frac{AB \sin ABA_1}{AC \sin ACA_1} = \frac{AB \sin(\angle B + 45^\circ)}{AC \sin(\angle C + 45^\circ)}.$$

由對稱性，有

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC \sin(\angle C + 45^\circ)}{BA \sin(\angle A + 45^\circ)}, \quad \frac{AF}{BF} = \frac{CA \sin(\angle A + 45^\circ)}{CB \sin(\angle B + 45^\circ)}.$$

綜以上知  $\frac{BD}{CD} \frac{CE}{AE} \frac{AF}{BF} = 1$ ，故由 Ceva 定理知  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  共點。

二、All solutions are:  $(9, 1)$ ,  $(9, 2)$ , and  $(3k^2, 3k)$  for all positive integers  $k$ .

First note that  $b \leq a$  and if  $b = a$  then  $a = b = 3$ .

Second, we have  $ab + b + 3$  divides  $a(ab + b + 3) - b(a^2 + a + b) = 3a - b^2$ .

For the case  $3a - b^2 = 0$ , we have  $(a, b) = (3k^2, 3k)$  are solutions.

So assume  $a > b$  and  $3a - b^2 \neq 0$ .

$ab + b + 3 < b^2 - 3a$  is impossible because  $b^2 < ab + b + 3$ . Thus  $ab < ab + b + 3 \leq 3a - b^2 < 3a$ ,  $b < 3$ .

For the case  $b = 1$ , we have  $a + 4 \mid 3a - 1$ , so  $a + 4 \mid 13$ , and check  $(9, 1)$  is a solution.

For the case  $b = 2$ ,  $2a + 5 \mid 3a - 4$ , so  $a = 9$ .