

2021 年亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試 (一) 試題

考試時間：2020 年 11 月 21 日上午 10:00 ~ 12:00

說明：本試題共兩頁，分成兩部分：選填題與非選擇題。

作答方式：

- 選填題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用藍、黑色原子筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

第一部分：選填題

說明：本部分共有五題，每一題或小題的配分標於題前，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

答案卡填答注意事項：答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。

1. (7 分) 已知 α, β, γ 為方程式 $x^3 + ax + 1 = 0$ 之三根，其中 a 為正實數。方程式 $x^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$ 之三根為 $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}$ 。已知 $\frac{|b|+|c|}{a}$ 的最小值可以寫成 $m^{1/n}$ ，其中 m, n 為正整數且 $n \leq 9$ ，則數對 $(m, n) = \underline{(\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}), (\textcircled{5})}$ 。
2. (a) (3 分) 設 $\triangle ABC$ 的內心為 I 。將 I 分別與頂點 A, B, C 以線段連接，與三角形的三邊圍出三個面積分別為 2, 3, 4 的小三角形。則 $\triangle ABC$ 的內切圓面積為 $\frac{\sqrt{\textcircled{6}\textcircled{7}}}{\textcircled{8}} \pi$ 。(化為最簡根式)
- (b) (4 分) 設 $ABCD$ 為平行四邊形，點 E, F 分別落在 AB, BC 邊上。已知 $\triangle AED$ 的面積等於 7、 $\triangle EBF$ 的面積等於 3、 $\triangle CDF$ 的面積等於 6。則 $\triangle DEF$ 的面積等於 $\underline{\textcircled{9}\sqrt{\textcircled{10}\textcircled{11}}}$ 。(化為最簡根式)

3. (7分) 某款桌遊共有 10 張牌，其中 3 張畫有一個骷髏頭，另外 5 張畫有一枚硬幣，剩下的 2 張為空白。將這 10 張牌面朝下洗牌後堆成一疊，由最上方起逐張依序開牌，直到累積出現 3 張骷髏頭或 3 枚硬幣便停止。則因累積出現 3 張骷髏頭而停止的機率為 $\frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13} \textcircled{14}}$ 。(化為最簡分數)
4. (7分) 設 n 為正整數，且所有與 n 互質的正整數 m 都滿足 m^6 除以 n 的餘數等於 1。則 n 之最大可能值為 $\textcircled{15} \textcircled{16} \textcircled{17} \textcircled{18}$ 。
5. (7分) 三角形 ABC 中， $\angle A = 23^\circ$ ， $\angle B = 46^\circ$ 。設 Γ 為以 C 為圓心、 CA 長為半徑的圓。作 $\angle B$ 的外角平分線 L ，且 Γ 與 L 交於 M, N 兩點。則 $\angle MAN = \textcircled{19} \textcircled{20}^\circ$ 。

第二部分：非選擇題

說明：每題 7 分，每題配分亦標於題前。答案必須寫在「答案卷」上，並標明題號，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用藍、黑色原子筆書寫，除幾何作圖外不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。

一、(7分) 找出所有符合下列性質的正整數 A, B ：

* A, B 寫成十進位後，有相同的位數。

* $2 \cdot A \cdot B = \overline{AB}$ ，其中 \cdot 是一般的乘法，而 \overline{AB} 是將 A, B 的十進位表示法依序連接寫成的十進位數字，例如 $A = 12, B = 34$ 時， $\overline{AB} = 1234$ 。

二、(7分) 給定正整數 n 。有一張 $n \times n$ 的方格紙。對於方格紙上的一對方格，這兩個方格有公共點（可以是共邊也可以是共頂點），則我們稱這一對方格“相鄰”。試求此方格紙上相鄰方格的對數。

參考答案：

1. (3888,6)

2. (a) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$; (b) $2\sqrt{22}$

3. $\frac{5}{28}$

4. 0504

5. 60°

一、 $(A, B) = (3, 6), (13, 52)$

二、 $2(n-1)(2n-1)$ (or $4n^2 - 6n + 2$)