2024 年亞太數學奧林匹亞競賽

試卷

考試時間：2024年3月12日

考試地點：國立臺灣師範大學

2024年國際數理學科奧林匹亞競賽

數學科選訓工作委員會試題組提供

注意事項：

(1)本試卷共五題，每題滿分七分。

(2)考試時間：4 小時(9:30 - 13:30)。

(3)所有計算紙必須連同試卷繳回。

(4)不可使用計算器、修正液(帶)。

(5)計算紙可再索取，試卷本每人限一份。

□ 缺考(由監考人員畫記)

	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題
初閱得分					
初閱簽名					
複閱得分					
複閱簽名					

第 36 屆亞太數學奧林匹亞 (APMO) 競賽試題

問題一. 設 ABC 為銳角三角形。分別在 AB, AC 邊上取點 D, E 使得直線 BC 與 DE 平行。令點 X 落在四邊形 $BCED$ 的內部。設射線 DX 與 EX 分別與邊 BC 交在點 P 與 Q，滿足 P, Q 皆位於 B 和 C 之間。設三角形 BQX 的外接圓與三角形 CPX 的外接圓交於點 $Y \neq X$。證明：點 A, X, Y 共線。

Problem 1. Let ABC be an acute triangle. Let D be a point on side AB and E be a point on side AC such that lines BC and DE are parallel. Let X be an interior point of $BCED$. Suppose rays DX and EX meet side BC at points P and Q, respectively such that both P and Q lie between B and C. Suppose that the circumcircles of triangles BQX and CPX intersect at a point $Y \neq X$. Prove that points A, X, and Y are collinear.

問題二. 考慮一張 100×100 的表格，並將位於第 a 列第 b 行的格子記為數對 (a,b)，其中 $1 \le a,b \le 100$。令 k 為滿足 $51 \le k \le 99$ 的整數。k-**騎士**是一只特殊的棋子，其行棋方式為：先沿水平或鉛直方向移動一格，再沿另一方向移動 k 格；也就是說，它可以從 (a,b) 跳到 (c,d)，只要 $(|a-c|,|b-d|)$ 等於 $(1,k)$ 或 $(k,1)$ 即可。一連串的格子 $(x_0,y_0)=(1,1),(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ 稱為一串**行動**，如果對所有 $i=1,2,\ldots,n$，都有 $1 \le x_i,y_i \le 100$，且 k-騎士可從 (x_{i-1},y_{i-1}) 跳到 (x_i,y_i)。在此情況下，行動中的每一格子 (x_i,y_i) 都稱為**可到達的**。

對於每個 k，試求可到達之格子的數量 $L(k)$。

Problem 2. Consider a 100×100 table, and identify the cell in row a and column b, $1 \le a,b \le 100$, with the ordered pair (a,b). Let k be an integer such that $51 \le k \le 99$. A *k-knight* is a piece that moves one cell vertically or horizontally and k cells to the other direction; that is, it moves from (a,b) to (c,d) such that $(|a-c|,|b-d|)$ is either $(1,k)$ or $(k,1)$. The k-knight starts at cell $(1,1)$, and performs several moves. A *sequence of moves* is a sequence of cells $(x_0,y_0)=(1,1)$, (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) such that, for all $i=1,2,\ldots,n$, $1 \le x_i,y_i \le 100$ and the k-knight can move from (x_{i-1},y_{i-1}) to (x_i,y_i). In this case, each cell (x_i,y_i) is said to be *reachable*. For each k, find $L(k)$, the number of reachable cells.

問題三. 設 n 為正整數，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 為正實數。證明：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\left(\frac{2}{1+a_i}\right)^{2^i} \geq \frac{2}{1+a_1a_2\cdots a_n} - \frac{1}{2^n}.$$

Problem 3. Let n be a positive integer and $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers. Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\left(\frac{2}{1+a_i}\right)^{2^i} \geq \frac{2}{1+a_1a_2\ldots a_n} - \frac{1}{2^n}.$$

問題四. 證明：對每一個正整數 t，都存在唯一的 $0,1,\ldots,t-1$ 的排列 $a_0,a_1,\ldots,a_{t-1}$，使得對每一個 $0\le i\le t-1$，二項式係數 $\binom{t+i}{2a_i}$ 是奇數，且 $2a_i\neq t+i$。

Problem 4. Prove that for every positive integer t there is a unique permutation $a_0,a_1,\ldots,a_{t-1}$ of $0,1,\ldots,t-1$ such that, for every $0\le i\le t-1$, the binomial coefficient $\binom{t+i}{2a_i}$ is odd and $2a_i\neq t+i$.

問題五. 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形。直線 ℓ 分別與邊 BC, AD 交於邊的內部點 R, S，且 ℓ 與射線 DC 在 C 點後方 ($\overline{DC}$ 的延長線) 交於點 Q，與射線 BA 在 A 的後方 ($\overline{BA}$ 的延長線) 交於點 P。設三角形 QCR 與 QDS 的外接圓交於點 $N \neq Q$，而三角形 PAS 與 PBR 的外接圓交於點 $M \neq P$。令直線 MP 與 NQ 交於點 X、直線 AB 與 CD 交於點 K、且直線 BC 與 AD 交於點 L。證明點 X 落在直線 KL 上。

Problem 5. Line ℓ intersects sides BC and AD of cyclic quadrilateral $ABCD$ in its interior points R and S respectively, and intersects ray DC beyond point C at Q, and ray BA beyond point A at P. Circumcircles of the triangles QCR and QDS intersect at $N \neq Q$, while circumcircles of the triangles PAS and PBR intersect at $M \neq P$. Let lines MP and NQ meet at point X, lines AB and CD meet at point K and lines BC and AD meet at point L. Prove that point X lies on line KL.