

2025 年亞太數學奧林匹亞初選考試 (二) 試題

比賽日期：2025 年 1 月 22 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題，每題滿分七分

問題一. 令 a_1, \dots, a_8 為實數。試求 $\frac{(1 + 2^2a_1 + \dots + 9^2a_8)^2}{1 + 2a_1^2 + \dots + 9a_8^2}$ 的最大可能值。

Problem 1. Let a_1, \dots, a_8 be real numbers. Find the maximum possible value of

$$\frac{(1 + 2^2a_1 + \dots + 9^2a_8)^2}{1 + 2a_1^2 + \dots + 9a_8^2}.$$

問題二. 黑板上有十個相異的兩位數正整數。試證：我們可以將其中一些正整數塗成紅色，另一些塗成藍色，使得紅色數字的總和與藍色數字的總和相同。(註：不需要對所有數字都塗色。每個數字至多只能塗一個顏色。)

Problem 2. There are ten distinct two-digit numbers on the blackboard. Prove that we can color some of them in red and some of them in blue, so that the sum of all red numbers equals to the sum of all blue numbers. (*Remark. You don't have to color all the numbers. Each number can only be colored once at most.*)

問題三. 銳角三角形 ABC 中 $AB \neq AC$, D 、 F 分別在 AB 與 AC 的邊上。令 G 為 DC 與 FB 的交點, M 為 BC 的中點。再令 P 、 Q 分別為 G 到 AB 與 AC 之垂足。證明: 若 $MP = MQ$ 則 D 、 B 、 C 、 F 四點共圓。

Problem 3. Let ABC be an acute triangle with $AB \neq AC$. Let D and F be on AB and AC , respectively. Let G be the intersection of DC and FB . Let M be the midpoint of BC . Further let P and Q be the feet of the perpendicular from G to AB and AC , respectively. Prove that: if $MP = MQ$, then D, B, C, F are concyclic.

問題四. 試求所有正整數對 (m, n) , 滿足

$$m^2 + 2 \times 3^n = m(2^{n+1} - 1).$$

Problem 4. Find all pairs of positive integers (m, n) such that

$$m^2 + 2 \times 3^n = m(2^{n+1} - 1).$$

問題五. 令 \mathbb{N} 為全體正整數所成的集合。定義函數

$$f(n) = n + \left[\sqrt[3]{n + 2 \left[\sqrt[3]{n} \right]} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

其中 $[a]$ 記為不大於 a 的最大整數。

(i) 試求 $f(f(n)) - 2f(n) + n$ 的所有可能值 (並給出證明)。

(ii) 證明：集合

$$\mathcal{S} := \left\{ n \in \mathbb{N} : f(f(n)) - f(n) - 1 = \left[\sqrt[3]{f(n)} \right] \leq 45 \right\}$$

恰有 2025 個相異元素。

Problem 5. Let \mathbb{N} be the set of all positive integers. Define function

$$f(n) = n + \left[\sqrt[3]{n + 2 \left[\sqrt[3]{n} \right]} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

in which $[a]$ is the largest integer no greater than a .

(i) Find all possible values of $f(f(n)) - 2f(n) + n$.

(ii) Prove that the set

$$\mathcal{S} := \left\{ n \in \mathbb{N} : f(f(n)) - f(n) - 1 = \left[\sqrt[3]{f(n)} \right] \leq 45 \right\}$$

has exactly 2025 elements.

2025 年亞太數學奧林匹亞初選考試 (二) 試題詳解暨評分標準

問題一. 令 a_1, \dots, a_8 為實數。試求 $\frac{(1 + 2^2a_1 + \dots + 9^2a_8)^2}{1 + 2a_1^2 + \dots + 9a_8^2}$ 的最大可能值。

解. 最大可能值為 2025

注意到由柯西不等式，

$$\begin{aligned} (1 + n_1x_1a_1 + \dots + n_8x_8a_8)^2 &= (1 \times 1 + x_1 \times a_1 + \dots + x_1 \times a_1 + \dots + x_8 \times a_8)^2 \\ &\leq (1^2 + x_1^2 + \dots + x_1^2 + \dots + x_8^2)(1^2 + a_1^2 + \dots + a_1^2 + \dots + a_8^2) \\ &= (1 + n_1x_1^2 + \dots + n_8x_8^2)(1 + n_1a_1^2 + \dots + n_8a_8^2) \end{aligned}$$

今令 $n_i = x_i = (i + 1)$ ，則有

$$(1 + 2^2a_1 + \dots + 9^2a_8)^2 \leq (1 + 2a_1^2 + \dots + 9a_8^2)(1 + 2 \times 2^2 + \dots + 9 \times 9^2)$$

故原題量小於等於

$$1^3 + \dots + 9^3 = \left(\frac{9(9+1)}{2}\right)^2 = 2025.$$

等號在 $a_i = i + 1$ 時成立。

選題者註：基本柯西不等式操作，比課綱多一點點。

Marking scheme

問題二. 黑板上有十個相異的兩位數正整數。試證：我們可以將其中一些正整數塗成紅色，另一些塗成藍色，使得紅色數字的總和與藍色數字的總和相同。(註：不需要對所有數字都塗色。每個數字至多只能塗一個顏色。)

解. Note that if we get two sets A, B (not necessarily disjoint) with this property, then the same is also true for the sets $A \setminus (A \cap B), B \setminus (A \cap B)$.

To get two distinct subsets with the same sum, note that there are $2^{10} - 1$ different non-empty subsets. From amongst the integers $10, \dots, 99$ any subset of size at most 10 can have a maximum sum of at most $91 + 92 + \dots + 99 = 945$ and so necessarily the sums of various subsets from among all the subsets of the chosen set of 10 elements can be at most $945 < 1023$ and so the problem is solved.

Marking scheme

問題三. 銳角三角形 ABC 中 $AB \neq AC$, D 、 F 分別在 AB 與 AC 的邊上。令 G 為 DC 與 FB 的交點, M 為 BC 的中點。再令 P 、 Q 分別為 G 到 AB 與 AC 之垂足。證明: 若 $MP = MQ$ 則 D 、 B 、 C 、 F 四點共圓。

解. 只需證明 $\angle DBF = \angle DCF$ 。

(1) 利用 $\triangle PBG$ 與 $\triangle QCG$ 為直角三角形, 分別取其斜邊中點 S, T , 從中點性質可知 $SP = MT$ 且 $TQ = MS$ 。又 $MP = MQ$ 所以 $\triangle MSP \cong \triangle QTM$ (SSS), 因此 $\angle PSM = \angle QTM$ 。

(2) 利用兩組平行線的關係 $MS \parallel CD, MT \parallel BF$ 。可知 $\angle GSM = \angle DGB = \angle GTM$ 。

(3) 由 (1), (2) 可知 $\angle DBF = \frac{1}{2}\angle PSG = \frac{1}{2}\angle GTQ = \angle DCF$ 。

Marking scheme

問題四. 試求所有正整數對 (m, n) , 滿足

$$m^2 + 2 \times 3^n = m(2^{n+1} - 1).$$

解. Taking mod m , we get $m \mid 2 \times 3^n$. Since if (m, n) is a solution, $(\frac{2 \times 3^n}{m}, n)$ is also a solution, so WLOG assume $m = 3^t$. Therefore we get $3^t + 2 \cdot 3^{n-t} = 2^{n+1} - 1$.

Suppose $2 < t$ and $2 < n - t$, we get $27 \mid 3^t + 2 \cdot 3^{n-t} = 2^{n+1} - 1$. So $18 \mid n + 1$, and $73 \mid 2^{18} - 1 \mid 2^{n+1} - 1$. But $3^i \equiv \pm(1, 3, 9, 27, 8, 24)(\text{mod } 73)$, and it is easy to check that there is no $i, j \in \mathbb{Z}$ such that $3^i + 2 \cdot 3^j \equiv 0(\text{mod } 73)$. That's contradiction and we get $t = 0, 1, 2$ or $n - t = 0, 1, 2$. After some research with inequalities, we get $(n, t) = (3, 2), (5, 2)$. Therefore $(m, n) = (6, 3), (9, 3), (9, 5), (54, 5)$.

Marking scheme

問題五. 令 \mathbb{N} 為全體正整數所成的集合。定義函數

$$f(n) = n + \left[\sqrt[3]{n + 2 \left[\sqrt[3]{n} \right]} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

其中 $[a]$ 記為不大於 a 的最大整數。

(i) 試求 $f(f(n)) - 2f(n) + n$ 的所有可能值 (並給出證明)。

(ii) 證明：集合

$$\mathcal{S} := \left\{ n \in \mathbb{N} : f(f(n)) - f(n) - 1 = \left[\sqrt[3]{f(n)} \right] \leq 45 \right\}$$

恰有 2025 個相異元素。

解. 顯然 f 是嚴格遞增函數, 且非映成。令 $g(n) = \left[\sqrt[3]{n + 2 \left[\sqrt[3]{n} \right]} \right]$, 顯然 $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 為映成函數。對每個 $k \in \mathbb{N}$, 我們將證明

$$g(n) = k \iff k^3 - 2k + 2 \leq n \leq (k+1)^3 - 2(k+1) + 1. \quad (1)$$

關於(1)的證明. 首先注意到

$$\begin{aligned} g(n) = k &\iff k \leq \sqrt[3]{n + 2 \left[\sqrt[3]{n} \right]} < k+1 \\ &\iff k^3 \leq n + 2 \left[\sqrt[3]{n} \right] \leq (k+1)^3 - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

由(2) 我們得到 $\left[\sqrt[3]{n} \right] = k-1$ 或 k . 分別討論如下：

– 若 $\left[\sqrt[3]{n} \right] = k-1$, 則 $k \geq 2$ 且 $(k-1)^3 \leq n \leq k^3 - 1$. 與 (2) 中 n 的範圍取交集可得到

$$k^3 - 2k + 2 \leq n \leq k^3 - 1. \quad (3)$$

– 若 $\left[\sqrt[3]{n} \right] = k$, 則 $k \geq 1$ 且 $k^3 \leq n \leq (k+1)^3 - 1$. 再與 (2) 中 n 的範圍取交集可得到

$$k^3 \leq n \leq k^3 + 3k^2 + k. \quad (4)$$

反之, 當 n 滿足(3) 或 (4)時, 即 $k^3 - 2k + 2 \leq n \leq k^3 + 3k^2 + k$, 必有 $g(n) = k$. 因此, 我們得到 $g(n) = k \iff k^3 - 2k + 2 \leq n \leq k^3 + 3k^2 + k = (k+1)^3 - 2(k+1) + 1$. 這給出了(1)的證明。 \square

現在我們回來討論 f 的值域。既然 f 是嚴格遞增函數，由(1)可得到，對每個 $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \text{當 } k^3 - 2k + 2 \leq n \leq k^3 + 3k^2 + k \text{ 時,} \\ & k^3 - k + 2 \leq f(n) = n + g(n) \leq k^3 + 3k^2 + 2k = (k+1)^3 - (k+1) \\ & \Rightarrow f(k^3 - 2k + (j+1)) = k^3 - k + (j+1), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \& \quad j = 1, \dots, 3k^2 + 3k - 1. \end{aligned} \quad (5)$$

注意到 $\bigcup_{k=1}^{\infty} [k^3 - 2k + 2, (k+1)^3 - 2(k+1) + 1] = [1, \infty) \supset \mathbb{N}$, 且當 $j \neq k$ 時, $[j^3 - 2j + 2, (j+1)^3 - 2(j+1) + 1]$ 及 $[k^3 - 2k + 2, (k+1)^3 - 2(k+1) + 1]$ 兩區間互斥。我們得到

$$\begin{aligned} \mathcal{R} & := \{f(n) : n \in \mathbb{N}\} \\ & = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{k^3 - k + 2, \dots, (k+1)^3 - (k+1)\} \\ & = \mathbb{N} \setminus \{j^3 - j + 1 : j \in \mathbb{N}\}, \end{aligned} \quad (6)$$

以下給出 (i) 及 (ii) 的證明：

(i) 的證明： 既然對每個正整數 $n \in \mathbb{N}$, 必存在唯一的正整數 k 使得 $k^3 - 2k + 2 \leq n \leq k^3 + 3k^2 + k$. 如同(5), 我們令

$$n = k^3 - 2k + (j+1), \quad j = 1, \dots, 3k^2 + 3k - 1.$$

我們將利用(5)來得到 $f(f(n)) - 2f(n) + n$ 的所有可能值。

– 當 $1 \leq j \leq 3k^2 + 2k - 1$ 時, 有 $j + k \leq 3k^2 + 3k - 1$. 由(5)得到

$$f(f(k^3 - 2k + (j+1))) = f(k^3 - k + (j+1)) = f(k^3 - 2k + (j+k+1)) = k^3 + j + 1.$$

此時可得到

$$f(f(n)) - 2f(n) + n = (k^3 + j + 1) - 2(k^3 - k + (j+1)) + k^3 - 2k + (j+1) = 0.$$

– 當 $3k^2 + 2k \leq j \leq 3k^2 + 3k - 1$ 時, 注意到 $k^3 - k + (j+1) = (k+1)^3 - 2(k+1) + (j - 3k^2 - 2k + 2)$ 且 $2 \leq j - 3k^2 - 2k + 2 \leq (k+1)$. 由(5)立刻得到

$$\begin{aligned} f(f(k^3 - 2k + (j+1))) & = f(k^3 - k + (j+1)) \\ & = f((k+1)^3 - 2(k+1) + (j - 3k^2 - 2k + 2)) \\ & = (k+1)^3 - (k+1) + (j - 3k^2 - 2k + 2). \end{aligned}$$

故得到

$$\begin{aligned} f(f(n)) - 2f(n) + n &= (k+1)^3 - (k+1) + (j - 3k^2 - 2k + 2) \\ &\quad - 2(k^3 - k + (j+1)) + k^3 - 2k + (j+1) = 1. \end{aligned}$$

綜上所述，我們證明了 $f(f(n)) - 2f(n) + n \in \{0, 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) 的證明：題目中的集合 \mathcal{S} 可等價地改寫為

$$\mathcal{S} = \left\{ s \in \mathcal{R} : \left[\sqrt[3]{s + 2 \left[\sqrt[3]{s} \right]} \right] - 1 = \left[\sqrt[3]{s} \right] \leq 45 \right\},$$

其中 $\mathcal{R} = \mathbb{N} \setminus \{j^3 - j + 1 : j \in \mathbb{N}\}$ (看(6)). 我們先證明，對每個固定的 $k \in \mathbb{N}$, 方程式

$$\left[\sqrt[3]{s + 2 \left[\sqrt[3]{s} \right]} \right] - 1 = \left[\sqrt[3]{s} \right] = k$$

共有 $2k$ 個正整數解 s ：

$$s = (k+1)^3 - j, \quad j = 1, \dots, 2k. \quad (7)$$

關於(7)的證明. 我們有 $\left[\sqrt[3]{s} \right] = k$ 和 $\left[\sqrt[3]{s+2k} \right] = k+1$. 這等價於 $k^3 \leq s < (k+1)^3$ 且 $(k+1)^3 \leq s+2k < (k+2)^3$. 整理得到 $(k+1)^3 - 2k \leq s < (k+1)^3$. 故得證。□

由(6)知，對每個固定的 k , (7)中僅當 $j = k$ 時, $s = (k+1)^3 - k \notin \mathcal{R}$, 其它 $2k - 1$ 個解都在 \mathcal{R} 中。故 \mathcal{S} 的元素個數為 $\sum_{k=1}^{45} (2k - 1) = 45^2 = 2025$ 個。

Marking scheme

出題者註：

一、我是從分析的觀點來設計這題，證明手法比較正規，這裡也提供盡量詳細的證明，其實很多細節可以適當簡化。但我覺得學生會去觀察出 $f(n)$ 跳值的規律再證明，這時候要確定所有使得 $f(n+1) - f(n) = 2$ 的 n 。必須嚴格且詳細證明才給分。

二、此函數還有其它性質，例如：對每個 $r \in \mathcal{R}$, 有

$$f\left(r - \left[\sqrt[3]{r + \left[\sqrt[3]{r} \right]} \right]\right) = r. \quad (8)$$

所以，我們直接發現另一個函數 $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(n) = n - \left[\sqrt[3]{n + \left[\sqrt[3]{n} \right]} \right]$ 是一個映成，但非一對一函數。更進一步地，令 $r = f(n)$, 既然 f 是一對一，我們可得到

$$f(n) - \left[\sqrt[3]{f(n) + \left[\sqrt[3]{f(n)} \right]} \right] = n.$$

(8)的證明: 若 $n \in \mathbb{N}$ 滿足 $f(n) = r \in \mathcal{R}$, 則由(5)得到 $n = r - k$, 且 k 滿足

$$k^3 - k + 2 \leq r \leq (k+1)^3 - (k+1). \quad (9)$$

從(9)可得到一個比較鬆的不等式 $(k-1)^3 < r < (k+1)^3$, 即

$$k-1 \leq [\sqrt[3]{r}] \leq k. \quad (10)$$

再結合(9)及(10), 我們得到 $k^3 < r + [\sqrt[3]{r}] < (k+1)^3$. 立刻得到 $[\sqrt[3]{r + [\sqrt[3]{r}]}] = k$. 因此, $n = r - k = r - [\sqrt[3]{r + [\sqrt[3]{r}]}]$, 故得證。