

2025 年台灣數學奧林匹亞考試試題

比賽日期：2025 年 2 月 5 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外，答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題，每題滿分七分

問題一. 令三角形 ABC 的內心為 I ，對應角 A 的旁心為 E ，外接圓為 \mathcal{O} 。令 A' 為 A 在 \mathcal{O} 的對徑點，而 M 為 \mathcal{O} 上弧 BAC 的中點。令 X 為 A 對 A' 的鏡射點， Y 為 A 對 M 的鏡射點。證明 $EIXY$ 共圓。

問題二. 令 a, b, c, d 為四個滿足 $abc + abd + acd + bcd = 1$ 的正實數。試決定

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)$$

的所有可能值。

問題三. 對於任意一對互質的正整數 a 與 b ，定義 $f(a, b)$ 為滿足 b 整除 $ak + 1$ 的最小非負整數 k 。證明：若 a 與 b 是互質的正整數，且滿足

$$f(a, b) - f(b, a) = 2,$$

則存在質數 p 滿足 p^2 整除 $a + b$ 。

問題四. 求所有滿足以下條件的正整數 n ：存在一種將 $1, 2, \dots, n^2$ 填入 $n \times n$ 方格表中的方法，使得每格恰有一個數字，每個數字恰出現一次，並滿足

- 對所有正整數 $1 \leq i < n^2$ ，都有 i 跟 $i + 1$ 相鄰（兩數相鄰若且唯若它們的格子有公共邊）；
- $1^2, 2^2, \dots, n^2$ 這 n 個數中，不存在兩個數在同一行或同一列。

問題五. 平面上有兩個固定圓 ω 與 Ω ，此兩圓交於相異兩點 A 與 B 。令 C 與 D 為 ω 上的兩固定點。令 P 為 ω 上一動點，並設直線 PA 與 Ω 再次相交於 Q 。證明：存在一個固定圓 \mathcal{O} ，使得不論 P 的位置為何， $\triangle QPC$ 外接圓與 $\triangle QBD$ 外接圓異於 Q 的交點 R 皆在 \mathcal{O} 上。

Problem 1. Given triangle ABC , let I , E , \mathcal{O} be its incenter, the excenter with respect to A , and circumcircle, respectively. Let A' be the antipodal point of A on \mathcal{O} , and M be the midpoint of the arc BAC on \mathcal{O} . Let X be the reflection of A across A' , and Y be the reflection of A across M . Prove that $EIXY$ are concyclic.

Problem 2. Let a, b, c, d be four positive reals such that $abc + abd + acd + bcd = 1$. Determine all possible values for

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc).$$

Problem 3. For any pair of coprime positive integers a and b , define $f(a, b)$ to be the smallest nonnegative integer k such that b divides $ak + 1$. Prove that if a and b are coprime positive integers satisfying

$$f(a, b) - f(b, a) = 2,$$

then there exists a prime number p such that p^2 divides $a + b$.

Problem 4. Find all positive integers n satisfying the following conditions: there is a way to fill in $1, 2, \dots, n^2$ into an $n \times n$ grid so that each cell has exactly one number, each number appears exactly once, and:

- For all positive integers $1 \leq i < n^2$, i and $i + 1$ are neighbors (two numbers are neighbors if and only if their cells share a common edge).
- Any two numbers in $1^2, 2^2, \dots, n^2$ are not in the same row or same column.

Problem 5. On a plane, two fixed circles ω and Ω intersect at two distinct points A and B . Let C and D be two fixed points on the circle ω . Let P be a moving point on ω , and let line PA meet circle Ω again at Q . Prove that there exists a fixed circle \mathcal{O} such that, regardless of the position for P , the second intersection R of two circumcircles of triangles QPC and QBD always lies on \mathcal{O} .