2026 年 EGMO 競賽初選考試 初選考試試題

考試時間：2025 年 9 月 20 日上午 10:00 ∼ 12:00

一般性資訊：

- 本試題共三頁（含本頁），共十六題。
- 題目分成四個領域：代數、組合、幾何與數論。各領域的四道題目大致依照其在領域內的難度順序排列。
- 各題皆獨立計分；答題時**不需**依照題號順序作答。

注意事項：

- 請用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 填答時，若答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。
- 填答時，若答案為分數，請以最簡分數作答。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

一、代數

1. 已知 $f(x)$ 為次數不超過二次的實係數多項式，且 $(x^2+1)f(x)$ 除以 x^3-2 的餘式為 1，則 $f(2)=\dfrac{①}{②}$。(化為最簡分數)

2. 實數數列 $x_1,x_2,\cdots$ 滿足 $x_1=12,\ x_2=23,\ x_3=34,\ x_4=45$ 且

$$x_n=x_{n-1}-x_{n-2}+x_{n-3}-x_{n-4}\ \text{對於所有}n\geq 5\text{皆成立。}$$

則 $x_{114}+x_{2025}=$ ③④。

3. 已知八次實係數多項式

$$p(x)=x^8-4x^7+7x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$$

有八個正實根（可能有重根）。則 f 的最小可能值為 $\dfrac{1}{⑤⑥⑦}$.

4. 已知正實數 x 滿足

$$\frac{1}{[x]}-\frac{1}{[2x]}=\frac{1}{6\{x\}},$$

其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，而 $\{x\}=x-[x]$。則 x 的最大可能值為 $\dfrac{⑧⑨}{⑩}$。(化為最簡分數)

二、組合

1. 在 $1,2,\ldots,20$ 等二十個正整數中選三個出來，滿足任兩個選出的數字差皆大於 1 的方法有 ⑪⑫⑬.

2. 要用若干片 1×2 和／或 2×1 個磁磚拼成一個 2×10 的長方形共有 ⑭⑮ 種拼法。

3. 某班級有 36 位同學。每天放學，4 名同學會留下來當值日生。過了 k 天，任 2 位同學都恰好一起當值日生一次。則 k 的值為 ⑯⑰⑱。

4. 寶寶在方格紙上將一些格子塗黑形成怪獸。一隻大怪獸是由至少 25 個相連的黑格子組成的怪獸。一隻究極大怪獸 是一隻無法在沿著格線剪裁下，拆分成兩隻大怪獸的大怪獸。則一隻究極大怪獸至多能由 ⑲⑳ 個格子組成。(兩個格子相連，若且唯若其有共同邊。)

三、幾何

1. 設直角三角形 ABC 的 $\angle A$ 爲直角，且 $\overline{CA}=3, \overline{AB}=2$。設一圓 Γ 與直線 AB, CA 皆相切，並且內切於 ABC 的外接圓。則圓 Γ 的半徑爲 $\underline{㉑ - \sqrt{㉒㉓}}$。

2. 設正三角形 ABC 的邊長爲 15，其外接圓爲 ω。設點 P 位於 ω 的 AB 劣弧上，且 $\angle PCB = 36^\circ$。則 $PA^2+PB^2+PC^2 = \underline{㉔㉕㉖}$。

3. 設三角形 ABC 的外心爲 O，外接圓半徑爲 3，$AB=4$ 而 $AC=5$。令角 A 的角平分線交 BC 於 P。則 $AP^2-OP^2 = \underline{㉗㉘}$。

4. ΔABC 爲一三角形，其中 $\angle A = 15^\circ$ 且 $\overline{AB}=10$。以 AC 和 BC 爲邊，分別向 ΔABC 外側做正方形 α 與 β。令 D 與 E 分別爲 α 和 β 上相對於 C 點的對頂點，M 則爲線段 $\overline{DE}$ 的中點。則三角形 ΔABM 的面積爲 $\underline{㉙㉚}$。

四、數論

1. 在所有的正整數 n 中，n^2+1 與 $(n+1)^2+1$ 的最大公因數的最大可能值爲 $\underline{㉛㉜}$.

2. 將正整數 n 的正因數個數記爲 $\tau(n)$。滿足 $\dfrac{\tau(N^2)}{\tau(N)} = 3$ 的最小正奇數 N 爲 $\underline{㉝㉞㉟㊱}$。

3. 令 n 爲一正整數，滿足 n 在十進位下各位數字的乘積等於 $\frac{25}{8}n-211$。則 n 的最大可能值爲 $\underline{㊲㊳㊴}$

4. 設 n 爲正整數。若 $(n-3)!$ 除以 n 的餘數爲 56，則 $n = \underline{㊵㊶㊷}$。

2026 年 EGMO 競賽初選考試 初選考試參考答案

一、代數

1. 答案：1/5
   令 $(x^2+1)f(x)=(x^3-2)(ax+b)+1$，代入 $x=i$ 得 $0=(a-2b+1)-(2a+b)i$，解聯立知 $a=-1/5$，$b=2/5$。代回原式並取 $x=2$ 即可。

   出題者（林延輯）
   選題者（高竹嵐）: 基本多項式運算，課綱內。

2. 答案：67
   注意到：

   $$x_{n+1}+x_n=(x_n-x_{n-1}+x_{n-2}-x_{n-3})+(x_{n-1}-x_{n-2}+x_{n-3}-x_{n-4})=x_n-x_{n-4}\Rightarrow x_{n+1}=-x_{n-4}.$$

   這表示 $x_{n+10}=-x_{n+5}=x_n$。因此

   $$x_{114}+x_{2025}=x_4+x_5=x_4+(x_4-x_3)+(x_2-x_1)=45+11+11=67$$

   選題者（高竹嵐）: 改自 2001 AIME II Problem 3.，純粹檢驗是否知道數列的基本代數操作。

3. 答案：1/256
   令實根為 a_i，$i=1,2,\cdots,8$。則由根與係數，$\sum x_i=4$ 且 $\sum_{i\neq j}x_ix_j=7$，故

   $$\sum x_i^2=(\sum x_i)^2-2\sum_{i\neq j}x_ix_j=2.$$

   但注意到由柯西不等式，$16=(\sum x_i^2)(\sum 1)\geq(\sum x_i)^2=16$，而等號僅在 $x_1=\cdots=x_8$ 時成立，因此 $x_1=\cdots=x_8=4/8=1/2$，從而 $f=1/2^8=1/256$。

   選題者（高竹嵐）: 2003 APMO P1。第一步根與係數是課綱內的概念，看能否引導到學生去做進一步的不等式操作。

4. 答案：31/8
   令 $[x]=n$，$\{x\}=y$。分兩種情況：

   - $y\in(0,1/2)$: 則 $\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{6y}$，也就是 $y=n/3$。但由於 $y<1/2$，我們有 $n=3y<3/2$，也就是 $n=1$，從而 $y=1/3$，得 $x=4/3\in(1,2)$
   - $y\in[1/2,1)$: 則則 $\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{6y}$，也就是 $y=(2n^2+n)/(6n+6)$。但由於 $y\in[1/2,1)$，我們有 $6n+6>2n^2+n\geq 3n+3$，從而 $n=2$ 或 3，分別得 $x=23/9\in(2,3)$ 與 $x=31/8\in(3,4)$。故 x 的最大可能值為 31/8。

選題者(高竹嵐): Argentina 2003 OMA L3 p1。並不複雜,有一些競賽經驗應該就知道該從什麼角度開始分類討論,但對課綱內學生會是很陌生的題目。

二、組合

1. 答案:816

   這等價於要把 20 顆球放進四個箱子裡,使得二號和三號箱子有至少 2 顆球,而四號箱子有至少 1 顆球。因此,這也等價於要把 15 顆球放進四個箱子裡,此方法數為 $C_3^{15+3} = 816$

   出題者(林延輯)

   改題者(高竹嵐): 課綱內排列組合。用排容原理或有系統計數都還是可以算。

2. 答案:89

   令 S_n 為拼成 $2\times n$ 的方法數,顯然 $S_0 = S_1 = 1$。現在對於一般性的 n,考慮最左邊的一直排:

   - 若最左邊是一個 2×1,則剩下的磁磚構成一個 $2\times(n-1)$,而我們已知其方法數為 S_{n-1};
   - 若最左邊是兩個 1×2,則剩下的磁磚構成一個 $2\times(n-2)$,而我們已知其方法數為 S_{n-2}。

   由以上得知,$S_0 = S_1 = 1$ 且 $S_n = S_{n-1}+S_{n-2}$,因此 $S_n = F_{n+1}$,費式數列的第 $n+1$ 項。故 $S_{11} = F_9 = 89$。

   出題者(高竹嵐): 自編,會遞迴當然簡單,不會的話,慢慢計數也可以。

3. (本題送分)對應的構造不存在。

   任選一個學生 A。注意到除了 A 以外的 35 個學生都必須與 A 恰同組一次,但 35 不是 3 的倍數,故對應的構造不存在。

   註:本題改自 IMO HK Prelim 2003。正確的題目應為 37 個學生,此時我們可以用算兩次證明 $k = 111$。考慮共出現過幾對學生。

   - 每天會出現 $C_2^4 = 6$ 對學生,故總共出現 $6k$ 對。
   - 全部 $C_2^{37} = 18\times 37$ 對學生各只會出現一次。

   因此 $18\times 37 = 6k \Rightarrow k = 3\times 37 = 111$。

   此問題對應 Steiner 系 $S(2,4,37)$,為已知存在(且不唯一)的構造。一個相對簡單的構造方式如下:

將 37 位同學編號爲 $\mathbb{Z}_{37} = \{0,1,2,\ldots,36\}$，以模 37 的加法運算。取三個母區塊

$$B_1 = \{0,1,3,24\}, \quad B_2 = \{0,4,9,15\}, \quad B_3 = \{0,7,17,25\}.$$

對每個 $t \in \mathbb{Z}_{37}$，定義平移

$$B_i + t = \{x + t \pmod{37} : x \in B_i\}, \qquad i = 1,2,3.$$

所有 $3 \times 37 = 111$ 個平移的區塊，各構成一天的值日生名單（每組 4 人）

4. 答案：97。一般性地，若大怪獸是由至少 n 格組成，則究極大怪獸至多只能有 $4n-3$ 格。

以格子爲點，共通邊爲邊作圖，這問題等價於：若一張圖 $G=(V,E)$ 不存在兩個交集爲空集且大小至少爲 n 的連通子圖，則 $|V|$ 的最大值爲何？

我們先構造 $|V| = 4n-3$ 的圖。考慮一個十字架狀的圖，其中四個方向的鍊長都是 $n-1$。易驗證此圖被拆分時，至少有一個連通子圖的大小小於 n。

現在用數學歸納法證明 $|V| = 4n-2$ 時總可以分拆成兩隻大怪獸。$n=1$ 與 2 時顯然。假設 $n-1$ 時命題已成立，則對於 $|V| = 4n-2$，考慮其扣除四個點後大小爲 $4(n-1)-2$ 的連通子圖，由歸納假設知 G' 可以被拆解成兩個大小 $n-1$ 的連通子圖，令其爲 $G_1 = (V_1,E_1)$ 和 $G_2 = (V_2,E_2)$。不失一般性假設 $|V_1| \geq |V_2| \geq n-1$。

- 若 $|V_1| \geq |V_2| \geq n$ 則命題成立。
- 若 $|V_2| = n-1$ 且扣除的四個點中有任一點連到 V_i，則命題成立。
- 若 $|V_2| = n-1$ 且扣除的四點都不與 V_2 相連，則它們都要連到 V_1，令這些點與 G_1 相連後的子圖爲 $G' = (V',E')$，其中 $|V'| = |V| - |V_2| = 3n-1$。任取 V' 中與 V_2 相連的點 a，則拔除 a 後，G' 至多被拆成三個連通子圖，其中必有一個的大小至少爲 n。則這個大小 n 的子圖與所有剩餘的點便構成兩個大小至少爲 n 的連通子圖，故命題成立。

選題者（高竹嵐）：改自 USAMO 2007 P4。基本圖論論述。

三、幾何

1. 答案：$5-\sqrt{13}$。一般性的，直角三角形中 A-傍內切圓的半徑爲 $b+c-\sqrt{b^2+c^2}$

取 $A=(0,0)$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 分別爲 x 軸與 y 軸正向，則 ABC 外接圓圓心爲 $O(c/2,b/2)$，外接圓半徑 $R=\sqrt{b^2+c^2}/2$. 令 Γ 的半徑爲 γ，則其圓心爲 $G(\gamma,\gamma)$。由於 Γ 與外接圓相切，我們有

$$\begin{aligned}&R=OG+\gamma\\ \Rightarrow &R^2-2R\gamma+\gamma^2=(R-\gamma)^2=OG^2=(\gamma-b/2)^2+(\gamma-c/2)^2=2\gamma^2-(b+c)\gamma+R^2\\ \Rightarrow &\gamma=b+c-2R=b+c-\sqrt{b^2+c^2}.\end{aligned}$$

出題者 (林延輯)

選題者 (高竹嵐): 圓內接性質操作。

2. 答案：450。事實上，只要 P 在圓周上，$a^2+b^2+c^2$ 恆等於 $6R^2$，其中 R 是外接圓半徑，也就是 $15/\sqrt{3}$。這是因爲

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PA})^2+(\overrightarrow{PB})^2+(\overrightarrow{PC})^2=&(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})^2\\ =&3(\overrightarrow{PO})^2+2\overrightarrow{PO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+3R^2=6R^2,\end{aligned}$$

其中用到 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 的性質。

出題者 (林延輯)

選題者 (高竹嵐): 基本向量幾何操作。

3. 答案：11

由圓冪知 $AP\times PD=OA^2-OP^2$。令 AP 交外接圓於另一點 D，則 ADB 與 ACP 相似，故

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AP}\Rightarrow AB\times AC=AD\times AP=AP(AP+PD)=AP^2+AP\times PD=AP^2+OA^2-OP^2,$$

故 $AP^2-OP^2=AB\times AC-OA^2=4\times 5-3^2=11.$

選題者 (高竹嵐): 改自 2007 Spain Math Olympiad P3，圓冪性質操作。

4. 答案：25

令 N 爲 M 在 AB 直線上的投影，則由 Bottema 定理，$\overline{MN}=\overline{AB}/2$，故 $|\Delta ABM|=1/2\times\overline{MN}\times\overline{AB}=\overline{AB}^2/4=25$。

備註：Bottema 定理的證明可參見：https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Bottema.shtml

四、數論

1. 答案：05

$$\begin{aligned}&(n^2+1,(n+1)^2+1)=(n^2+1,n^2+2n+2)=(n^2+1,2n+1)\\ &=(n^2-2n,2n+1)=(n(n-2),2n+1)=(n-2,2n+1)=(n-2,5)\end{aligned}$$

因此最大公因數爲 1 或 5，其中 5 可以在 $n=7$ 時達到。

出題者 (高竹嵐) : 改自 Singapore Junior Math Olympiad 2007 2nd Round p3 SMO。輾轉相除法。

2. 答案 : 2025

令 $N=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$，則

$$3=\frac{\tau(N^2)}{\tau(N)}=\frac{(2\alpha_1+1)\cdots(2\alpha_k+1)}{(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1)}.$$

$k=1$ 時顯然不成立。$k=2$ 時，我們有

$$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)=3(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\Leftrightarrow(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)=3,$$

得 $\alpha_1=4$ 而 $\alpha_2=2$。又因爲 N 是正奇數，因此最小的 N 爲 $3^4\times5^2=2025.$

出題者 (林延輯)

選題者 (高竹嵐): 標準分解式應用，課綱內。

3. 答案 : 088

顯然 $8|n$，從而乘積 M 爲偶數。令 $n=8k$，則因爲 $M=25k-211$ 爲偶數，從而 k 是奇數。又基於 $M\le n$，我們有 $0\le25k-211\le8k\Rightarrow9\le k\le12\Rightarrow k=$ 9 or 11。分別代入得 $k=72$ 或 $k=88$，故最大值爲 88。

選題者 (高竹嵐): Nordic Mathematical Contest, April 2005, problem 1。

4. 答案 : 113

首先，若 $n>56$ 爲合數，則 $(n-3)!$ 是 n 的倍數；故滿足題設的 $n=p$ 必爲質數。由 Wilson's lemma, $(p-2)!$ 餘以 p 的餘數爲 1，所以 $(p-3)!$ 除以 p 的餘數 x，必滿足 $(p-2)x\equiv1\pmod{p}$，即 $(2x+1)$ 被 p 整除。$x=56$ 代入得 $p=113$，是一個質數，合題意。

出題者 (林延輯)

選題者 (高竹嵐): 運用 Wilson 的入門競賽題。