2026 亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試 (一) 試題

考試時間：2025 年 11 月 08 日上午 10:00 ∼ 12:00

說明：本試題共兩頁，分成兩部分：選填題與非選擇題。

作答方式：

- 選填題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用藍、黑色原子筆在「答案卷」上作答；更正時可使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

第一部分：選填題

說明：本部分共有五題，每題七分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

答案卡填答注意事項：答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。

1. 有 4 枚無法區別的金幣與 4 枚無法區別的銀幣，每枚硬幣都恰有一面有人臉。我們想要將這 8 枚硬幣疊成一疊，使得任兩枚相鄰的硬幣都不是以人臉面接觸人臉面。則我們一共有 $\underline{①②③}$ 種可能的疊法。
2. 已知 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，AP,BP,CP 分別交 $\triangle ABC$ 外接圓於 K,L,M。若 $AC=10,BC=9,PA=8,PB=7$，則 $\frac{LM}{KM}=\underline{\frac{④⑤}{⑥⑦}}$（化為最簡分數）。
3. 若正實數 a,b,c,d 滿足 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$，則 $(a+\sqrt{2}b)(c+d)^2$ 的最大可能值為 $\underline{\frac{⑧}{⑨}}$（化為最簡分數）。
4. 考慮無窮數列 $1,11,111,1111,\ldots$。這個數列中的數字，除以 2026 的餘數，總共有 $\underline{⑩⑪⑫}$ 種不同的餘數。

5. 設 x, y, z 爲兩兩相異的實數，並滿足方程組 $\begin{cases} 2x+\frac{y}{z}=3, \\ 2y+\frac{z}{x}=3, \\ 2z+\frac{x}{y}=3. \end{cases}$ 則 $x+y+z=$

$\dfrac{⑬⑭}{⑮}$ 。

第二部分：非選擇題

說明：每題 7 分。答案必須寫在「答案卷」上，並標明題號，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用藍、黑色原子筆書寫，除幾何作圖外不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法淸楚辨識，其後果由考生自行承擔。

一、 2025^2 個數字構成一個 2025×2025 的方陣。已知方陣中任兩橫排都不相同。證明：我們必可移除其中的一直列，使得在剩下的 2024×2025 方陣中，任兩橫排仍不相同。（註：對於任兩橫排，只要它們在某一直列的數字不相同，該兩橫排便視爲不相同。）

二、 令 ABC 爲銳角三角形，其中 $AC > AB$。在邊 AC 和 AB 上分別取兩點 D 和 E，使得 $CD = BE$。假設線段 BD 與 CE 的交點爲 F，並在邊 AC 上取一點 G，使得直線 GF 平行於 $\angle BAC$ 的角平分線。令 H 爲 AB 與 FG 交點。試證 $\frac{AB}{DA} = \frac{CG}{HE}$。

2026 年亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試（一）

選填題參考解答

1. 630
2. $\frac{36}{35}$
3. $\frac{4}{3}$
4. 253
5. $\frac{13}{2}$

2026 **年亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試 (一)**

非選擇題參考解答

一、 爲簡化說明，我們將用 R_i 與 C_j 分別表示第 i 橫排與第 j 直列，並用 $R_i^{-(j_1,j_2,\cdots,j_k)}$ 表示 R_i 扣除 C_{j_1} 到 C_{j_k} 後剩餘的部分。

解法一、 我們用數學歸納法證明命題對 $n\times n$ 的方陣皆成立。$n=2$ 時顯然。現假設命題對 $n-1$ 成立，則對 $n\times n$ 的方陣，若 R_i^{-n} 全相異則滿足題意；若否，則表示有一些橫排僅在 C_n 相異。換言之，我們可以將所有" 扣除 C_n 後相等" 的 R_i 蒐集成子集，從而得到等價類 $\mathscr{R}_1,\cdots,\mathscr{R}_K$，注意到此時 $K\leq n-1$。不失一般性假設 $R_k\in\mathscr{R}_k$。

現在，讓我們考慮 $R_1^{-n},\cdots,R_K^{-n}$，並補上一些相異橫列後得到一個 $(n-1)\times(n-1)$ 方陣，由歸納假設知存在 $1\leq j\leq n-1$ 使得 $R_1^{-(j,n)}$ 到 $R_K^{-(j,n)}$ 皆相異，從而 R_1^{-j} 到 R_K^{-j}。再注意到：

- 對於 $R_p,R_q\in\mathscr{R}_k$，因爲其於 C_n 相異，故 R_p^{-j} 與 R_q^{-j} 仍相異；
- 對於 $R_p\in\mathscr{R}_k$，$R_q\in\mathscr{R}_\ell$ 且 $k\neq\ell$，$R_p^{-j}=R_k^{-j}$ 與 $R_q^{-j}=R_\ell^{-j}$ 相異。

以上兩點表示 R_1^{-j} 到 R_n^{-j} 皆相異，故移除 C_j 滿足題意。證畢。

解法二、 讓我們用 $\mathscr{E}_k=\{E_1,E_2,\cdots,E_{q(k)}\}$ 表示" 僅在前 k 直排中有差異" 的橫排組成的等價類。注意到

- 若移除 C_1 不滿足題意，表示至少有一個 $E\in\mathscr{E}_1$ 有兩個以上元素，因此 $q(1)\leq n-1$。
- 若 $q(k)\leq n-k$，且移除 C_{k+1} 仍不滿足題意，注意到若 $q(k)=q(k+1)$ 則 $\mathscr{E}_k=\mathscr{E}_{k+1}$，但此時移除 C_{k+1} 將滿足題意，矛盾！因此 $q(k+1)<q_k$，從而 $q_{k+1}\leq n-(k+1)$。

綜以上，如果移除 C_1 到 C_n 都不滿足題意，則有 $1=|\mathscr{E}_n|\leq n-n=0$，矛盾！

二、 1. 以 ACE 爲梅氏三角形，HF 爲截線可知 $\frac{AH}{HE}\cdot\frac{EF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$

2. 以 ACE 爲梅氏三角形，DB 爲截線可知 $\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EF}{FC}\cdot\frac{CD}{DA}=1$

3. 由題設知 $BE=CD$，且由於 $\angle AHG=\frac{1}{2}\angle A=\angle AGH$ 知 $AH=AG$。

綜合以上知 $\frac{AB}{DA}=\frac{CG}{HE}$。