

2026 年 EGMO 競賽初選考試 初選考試試題

考試時間：2025 年 9 月 20 日上午 10:00 ~ 12:00

一般性資訊：

- 本試題共三頁（含本頁），共十六題。
- 題目分成四個領域：代數、組合、幾何與數論。各領域的四道題目大致依照其在領域內的難度順序排列。
- 各題皆獨立計分；答題時**不需**依照題號順序作答。

注意事項：

- 請用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 填答時，若答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。
- 填答時，若答案為分數，請以最簡分數作答。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

一、代數

1. 已知 $f(x)$ 為次數不超過二次的實係數多項式，且 $(x^2 + 1)f(x)$ 除以 $x^3 - 2$ 的餘式為 1，則 $f(2) = \frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}}$ 。(化為最簡分數)

2. 實數數列 x_1, x_2, \dots 滿足 $x_1 = 12, x_2 = 23, x_3 = 34, x_4 = 45$ 且

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4} \text{ 對於所有 } n \geq 5 \text{ 皆成立。}$$

則 $x_{114} + x_{2025} = \frac{\textcircled{3}\textcircled{4}}{\textcircled{2}}$ 。

3. 已知八次實係數多項式

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

有八個正實根（可能有重根）。則 f 的最小可能值為 $\frac{1}{\textcircled{5}\textcircled{6}\textcircled{7}}$ 。

4. 已知正實數 x 滿足

$$\frac{1}{[x]} - \frac{1}{[2x]} = \frac{1}{6\{x\}},$$

其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，而 $\{x\} = x - [x]$ 。則 x 的最大可能值為 $\frac{\textcircled{8}\textcircled{9}}{\textcircled{10}}$ 。(化為最簡分數)

二、組合

1. 在 $1, 2, \dots, 20$ 等二十個正整數中選三個出來，滿足任兩個選出的數字差皆大於 1 的方法有 $\textcircled{11} \textcircled{12} \textcircled{13}$ 。

2. 要用若干片 1×2 和 / 或 2×1 個磁磚拼成一個 2×10 的長方形共有 $\textcircled{14} \textcircled{15}$ 種拼法。

3. 某班級有 36 位同學。每天放學，4 名同學會留下來當值日生。過了 k 天，任 2 位同學都恰好一起當值日生一次。則 k 的值為 $\textcircled{16} \textcircled{17} \textcircled{18}$ 。

4. 寶寶在方格紙上將一些格子塗黑形成怪獸。一隻大怪獸是由至少 25 個相連的黑格子組成的怪獸。一隻究極大怪獸 是一隻無法在沿著格線剪裁下，拆分成兩隻大怪獸的大怪獸。則一隻究極大怪獸至多能由 $\textcircled{19} \textcircled{20}$ 個格子組成。(兩個格子相連，若且唯若其有共同邊。)

三、幾何

1. 設直角三角形 ABC 的 $\angle A$ 為直角，且 $\overline{CA} = 3$, $\overline{AB} = 2$ 。設一圓 Γ 與直線 AB, CA 皆相切，並且內切於 ABC 的外接圓。則圓 Γ 的半徑為 $\underline{\textcircled{21} - \sqrt{\textcircled{22} \textcircled{23}}}$ 。
2. 設正三角形 ABC 的邊長為 15，其外接圓為 ω 。設點 P 位於 ω 的 AB 劣弧上，且 $\angle PCB = 36^\circ$ 。則 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = \underline{\textcircled{24} \textcircled{25} \textcircled{26}}$ 。
3. 設三角形 ABC 的外心為 O ，外接圓半徑為 3， $AB = 4$ 而 $AC = 5$ 。令角 A 的角平分線交 BC 於 P 。則 $AP^2 - OP^2 = \underline{\textcircled{27} \textcircled{28}}$ 。
4. $\triangle ABC$ 為一三角形，其中 $\angle A = 15^\circ$ 且 $\overline{AB} = 10$ 。以 AC 和 BC 為邊，分別向 $\triangle ABC$ 外側做正方形 α 與 β 。令 D 與 E 分別為 α 和 β 上相對於 C 點的對頂點， M 則為線段 \overline{DE} 的中點。則三角形 $\triangle ABM$ 的面積為 $\underline{\textcircled{29} \textcircled{30}}$ 。

四、數論

1. 在所有的正整數 n 中， $n^2 + 1$ 與 $(n+1)^2 + 1$ 的最大公因數的最大可能值為 $\underline{\textcircled{31} \textcircled{32}}$ 。
2. 將正整數 n 的正因數個數記為 $\tau(n)$ 。滿足 $\frac{\tau(N^2)}{\tau(N)} = 3$ 的最小正奇數 N 為 $\underline{\textcircled{33} \textcircled{34} \textcircled{35} \textcircled{36}}$ 。
3. 令 n 為一正整數，滿足 n 在十進位下各位數字的乘積等於 $\frac{25}{8}n - 211$ 。則 n 的最大可能值為 $\underline{\textcircled{37} \textcircled{38} \textcircled{39}}$ 。
4. 設 n 為正整數。若 $(n-3)!$ 除以 n 的餘數為 56，則 $n = \underline{\textcircled{40} \textcircled{41} \textcircled{42}}$ 。

2026 年 EGMO 競賽初選考試 參考答案

一、代數

1. $\frac{1}{5}$

2. 67

3. $\frac{1}{256}$

4. $\frac{31}{8}$

二、組合

1. 816

2. 89

3. (本題送分)

4. 97

三、幾何

1. $5 - \sqrt{13}$

2. 450

3. 11

4. 25

四、數論

1. 05

2. 2025

3. 088

4. 113