2026 年 EGMO 競賽複選考試試題詳解

問題一. 設 N 爲一個由數字 $1, 2, \ldots, 9$ 組成的九位數，其中每個數字恰好出現一次。定義 M 爲 N 的反序數 (例如：若 $N = 123456789$，則 $M = 987654321$)。若已知 N 與 M 皆能被 37 整除，試求滿足上述條件的 N 之個數。

解. 以下 $\equiv$ 皆爲對 $\mod 37$。注意到 $10^2 \equiv -11$ 而 $10^3 \equiv 1$，因此若 $N = \sum_{i=1}^{9} n_i 10^{i-1}$，並令 $s_1 = n_1 + n_4 + n_7$，$s_2 = n_2 + n_5 + n_8$，$s_3 = n_3 + n_6 + n_9$，則 N 爲反序數若且唯若

$$\begin{cases} s_1 + 10s_2 - 11s_3 \equiv 0 \\ s_3 + 10s_2 - 11s_1 \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow 12(s_1 - s_3) \equiv 0 \Rightarrow s_1 \equiv s_3.$$

從而有 $0 \equiv s_1 + 10s_2 - 11s_3 \equiv 10(s_2 - s_1)$，故 $s_1 \equiv s_2 \equiv s_3$。又 $s_1 + s_2 + s_3 \equiv 45$，因此我們有 $s_1 = s_2 = s_3 = 15$。

現在，把 1 到 9 分成三組，每一組的和皆爲 15，只有以下兩種可能：

- $\{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}$;
- $\{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{3, 5, 7\}$

因此總可能數爲 $2 \times 3! \times (3!)^3 = 2592.$

問題二. 我們在圓周上選 $n>3$ 個點，並將這些點其依照某個順序編號爲 1 到 n。對於兩個不相鄰的點 A 和 B，如果在其中一個弧 AB 內所有點的編號，都比 A 和 B 的編號小，則稱這兩個點**相關**。試證明在圓周上恰有 $n-3$ 對相關的點。

解. **解法一（拔除特定點）:** 讓我們用數學歸納法證明。首先，當 $n=4$ 時，注意到 $(2,3)$，$(2,4)$ 和 $(3,4)$ 三組點對中，必只有一組是不相鄰的，而該組便是唯一的相關點對，故命題對 $n=4$ 成立。

現在，假設命題對 $n=k$ 成立。當 $n=k+1$ 時，考慮 1 的位置，並假設其左右兩點爲 (A,B)。假設我們將 1 的點拔掉，則除了 (A,B) 以外點對的相關性皆維持不變。此外，(A,B) 在 1 被拔掉之前必相關（因爲兩點不相鄰且短弧上只有 1），在 1 被拔掉之後必不相關（因爲 1 被拔掉後兩點相鄰）。以上知 $n=k+1$ 時的相關點對必恰比 $n=k$ 時的相關點對多 1 個，故由數學歸納法，證畢。

解法二（分割圓弧）: 一樣使用數學歸納法證明。$n\le 4$ 的證明同解法一。現在假設命題對 $n\le k$ 成立。當 $n=k+1$ 時，注意到 $n-2, n-1, n$ 三點中，至少有兩點相關，令其爲 x 和 y。假設 $\overline{xy}$ 將圓弧切成兩弧 $A=\{x,a_1,a_2,\cdots,a_k,y\}$ 與 $B=\{y,b_1,b_2,\cdots,b_{n-2-k},x\}$。易知任何一對 (a_i,b_j) 皆不相關（因爲 $\min\{a_i,b_j\}<n-2$，但 a_i 與 b_j 決定的兩弧上各有 x 和 y）。此外，若我們將 B 用 $\{n,0,n-1\}$ 換掉，不影響 A 中的相關點對數，而由歸納假設此點對數爲 $|A|+1-3=k$。同理，B 中的相關點對數爲 $n-2-k$。而由於 $(n-1,n)$ 此一相關點對會在兩次計算中被重複計算一次，故總相關點對數爲 $k+(n-2-k)-1=n-3$。由數學歸納法，證畢。

問題三. 設三角形 ABC 的外心爲 O。點 D, E, F 分別位於邊 BC, CA, AB 的內部，並且滿足 $DE \perp CO$ 以及 $DF \perp BO$。令 K, L, M 分別爲三角形 $\triangle AFE$、$\triangle ADC$、$\triangle ABD$ 的外心。證明：四邊形 $KLOM$ 爲平行四邊形。

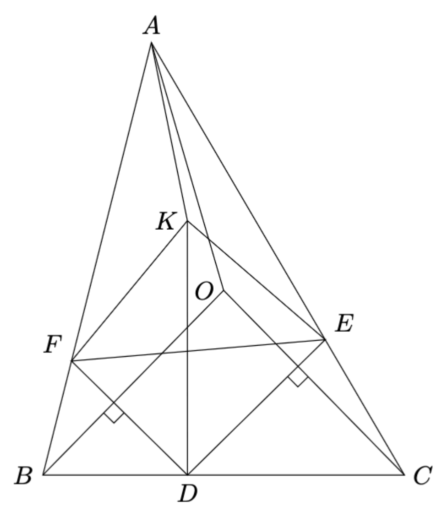
解. Step1. A, F, D, C 共圓，同理 A, B, D, E 共圓。

過 C 作 $\triangle ABC$ 外接圓的切線 l，易知 $l \parallel DE$，所以 $\angle CDE = \angle(BC, l) = \angle BAC$，所以 A, F, D, C 共圓。

Step2. $KL \perp AF$ 且 $MO \perp AB$，同理 $KM \perp AE$ 且 $LO \perp AC$

由以 K, L 爲圓心的兩圓交於 A, F 且以 M, O 爲圓心的兩圓交於 A, B 易知結果。

以上得知 $KL \parallel MO$ 且 $KM \parallel LO$，因此 $KLOM$ 爲平行四邊形。



問題四. 設 $\mathbb{Z}^+$ 爲正整數集合。試求所有函數 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$，使得對於所有正整數 m,n，以下條件皆成立：

1. $f(m)+f(n)-mn>0$
2. $f(m)+f(n)-mn$ 整除 $mf(m)+nf(n)+m+n$

解. **唯一可能爲 $f=n^2+1$.**

1. $f(1)=2$

   證明：帶入 $n=m=1$ 得 $2f(1)-1\mid 2f(1)+2$，因此 $2f(1)-1\mid 3$，故 $2f(1)-1=1$ or 3，也就是 $f(1)=1$ or 2. 但若 $f(1)=1$，取 $m=1$ 得

   $$1+f(n)-n\mid 2+nf(n)+n\Rightarrow f(n)-n+1\mid n^2+2$$

   但此時取 $n=3$，因爲 $3^2+2=11$ 爲質數，我們必有 $f(3)-3+1=1$ or 11，也就是 $f(3)=3$ or 13。但當我們代入 $m=n=3$ 時，$f(3)=3$ 會違背條件式 1，而 $f(3)=13$ 會違背條件式 2，故兩者皆矛盾。因此 $f(1)=2$。

2. $f(n)=n^2+1$

   證明：現在代入 $m=1$，得到

   $$f(n)-n+2\mid n^2-n+3\Rightarrow n^2-n+3=k_n(f(n)-n+2)$$

   但注意到

   - n^2-n+3 必爲奇數，因此 k_n 爲奇數。
   - 若 $k_n\geq 3$，則我們有

     $$f(n)=\frac{n^2-n+3}{k_n}+(n-2)\leq\frac{n^2-n+3}{3}+n-2=\frac{n^2}{3}+\frac{2n}{3}-1.$$

     但考慮 $m=n$，有 $2f(n)-n^2>0\Rightarrow f(n)>n^2/2$，這表示我們必須有

     $$\frac{n^2}{3}+\frac{2n}{3}-1>\frac{n^2}{2}$$

     易檢驗上式對於任何 $n\geq 1$ 皆不成立，矛盾！

   綜以上，我們有 $k_n=1$，因此 $f(n)=n^2+1$，代入檢驗知其滿足題意。

問題五. 令正實數 a, b, c 滿足 $abc = 1$. 證明：

$$\frac{1}{2\max\{a^3, b^3\} + 3a + 4} + \frac{1}{2\max\{b^3, c^3\} + 3b + 4} + \frac{1}{2\max\{c^3, a^3\} + 3c + 4} \leq \frac{1}{3}.$$

解. 利用算幾不等式可得到

$$\begin{aligned} 2\max\{a^3, b^3\} + 3a + 4 \geq & a^3 + b^3 + 3a + 4 \\ = & (a^3 + b^3 + 1) + 3a + 3 \geq 3(ab + a + 1). \end{aligned}$$

等號成立若且唯若 $a = b = 1$. 同理可證

$$2\max\{b^3, c^3\} + 3b + 4 \geq 3(bc + b + 1), \quad 2\max\{c^3, a^3\} + 3c + 4 \geq 3(ca + c + 1).$$

結合以上三個不等式，再由條件 $abc = 1$ 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\max\{a^3, b^3\} + 3a + 4} + \frac{1}{2\max\{b^3, c^3\} + 3b + 4} + \frac{1}{2\max\{c^3, a^3\} + 3c + 4} \\ \leq & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1}\right) \\ = & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{ab}{ab + a + 1}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

等號成立若且唯若 $a = b = c = 1$.