2026 年亞太數學奧林匹亞初選考試（二）試題詳解暨評分標準

問題一. 令 $f(n)$ 爲 n 的所有正因數的乘積。試求所有讓 $f(n)$ 是 n 的冪次的正整數 n。

備註：a 是 b 的冪次，若且唯若存在正整數 k 使得 $a = b^k$。

解. **答案是 1 和所有非完全平方數。**

考慮質因數表示 $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$，則

$$\begin{aligned} f(n) &= (p_1^{0+1+2\ldots+r_1})^{(r_2+1)\ldots(r_k+1)} \times \cdots \times (p_k^{0+1+2\ldots+r_k})^{(r_1+1)\ldots(r_{k-1}+1)} \\ &= n^{\tau(n)/2}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\tau(n) = (r_1+1) \times \cdots \times (r_k+1)$ 爲 n 的正因數個數。而 n 的正因數個數爲奇數，若且唯若 n 是完全平方數，因此 $f(n)$ 是 n 的冪次，若且唯若 n 是 1 或非完全平方數。

問題二. 某課本有 30 個單元，每個單元的頁數都是一個不大於 30 的正整數，且任兩個單元的頁數都不相同。任兩個單元不會出現在同一個頁面上。假設第一單元從課本的第一頁開始，且每個單元都緊接著前一個單元。設有 N 個單元的第一頁出現在奇數頁。試求 N 的最大可能值。

解. <u>N **的最大可能值爲** 23</u>

令第 i 單元有 a_i 頁，$S_0=0$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，則第 n 單元的第一頁爲 $S_{n-1}+1$。因此問題等價於：若 $\{a_1,\cdots,a_{30}\}$ 爲 $\{1,2,\cdots,30\}$ 的重排，則 $S_0,S_1,\cdots,S_{29}$ 中最多有幾個偶數？

注意 S_n 與 S_{n+1} 的奇偶性不同，若且唯若 a_n 是奇數。而由於 1 到 30 中恰有 15 個奇數，因此從 $S_0=0$ 這個偶數開始，S_n 數列的奇偶性恰會轉換 15 次，且其中第一次轉換會是從偶轉奇，第二次是從奇轉偶，以此規則交替出現。這意味著 $S_0,S_1,\cdots,S_{30}$ 這個數列中至少有 $\lceil 15/2\rceil=8$ 個奇數 (因爲至少有 8 次偶轉奇)，因此 S_0 到 S_{29} 至少有 7 個奇數，也就是 $N\leq 23$。

最後證明 $N=23$ 是可達到的。以下是一個簡單的構造：

$$2,4,6,\cdots,30,29,27,25,\cdots 1$$

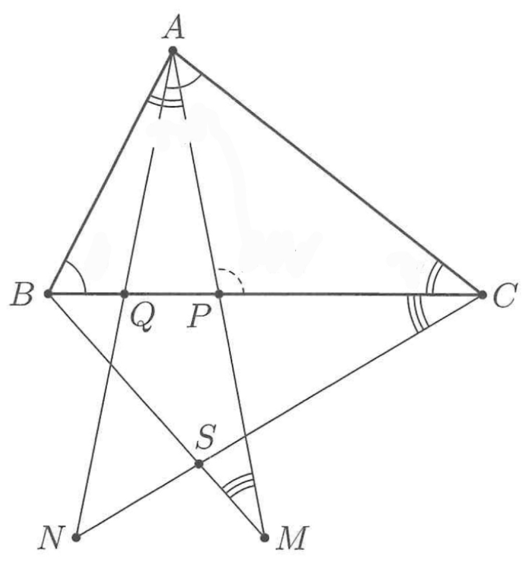
問題三. 令 $\triangle ABC$ 爲銳角三角形，點 P、Q 在邊 BC 上，滿足 $\angle PAB = \angle ACB$ 及 $\angle QAC = \angle CBA$。在 AP 射線上取點 M 使得 P 在 A、M 之間，並在 AQ 射線上取點 N 使得 Q 在 A、N 之間，滿足 $\frac{AP}{PM} = \frac{QN}{AQ}$。證明直線 BM 與 CN 的交點落在三角形 ABC 的外接圓上。

解. 令 S 爲直線 BM 與 CN 的交點，易知 $\triangle ABP$ 與 $\triangle CAQ$ 相似。因此

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BP \cdot QN}{PA \cdot AQ} = \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{QN}{AQ} = \frac{QN}{QC}.$$

又 $\angle BPM = \angle CQN$，所以 $\triangle BPM$ 與 $\triangle NQC$ 相似，因此 $\angle BMP = \angle NCQ$，可知 $\triangle BPM$ 與 $\triangle BSC$ 相似。可得

$$\angle CSB = \angle BPM = 180^\circ - \angle BAC.$$



問題四. 試求所有正整數 n，滿足：存在整數 a 和 b，使得 n 爲 a^2+b^2+1 的因數。

解. **<u>答案是所有不被 4 整除的正整數 n。</u>**

首先注意到，由中國剩餘定理，命題對 $n=2^t p_1^{q_1}\cdots p_k^{q_k}$ 成立，若且唯若命題對 $2^t, p_1^{q_1}, \cdots, p_k^{q_k}$ 皆成立，因此我們僅需針對質數冪次進行討論即可。

對於 2^t，由於 $2^1 \mid 1^2+0^2+1$，故 $t=1$ 滿足題意。又因爲 $x^2 \equiv 0 \text{ or } 1 \mod 4$，故 $2^2 \nmid a^2+b^2+1$，因此 $t \geq 2$ 皆不滿足題意。

而對於奇質數 p，首先注意到 $\{a^2 \mod p\}$ 與 $\{-1-b^2 \mod p\}$ 的大小皆爲 $\frac{p+1}{2}$，因此必可找到 a 與 b 使得 $a^2 \equiv -1-b^2 \mod p$，從而 $p \mid a^2+b^2+1$。

現在假設存在 a 與 b 使得 p^k 整除 a^2+b^2+1，WLOG 假設 $p \nmid a$。令 $a^2+b^2+1=Mp^k$。此時，

$$(a+p^k t)^2+b^2+1 \equiv (a^2+b^2+1)+2ap^k t+p^{2k}t^2 \equiv Mp^k+2ap^k t \mod p^{k+1}$$

要使上式模 0，我們只需要取 t 使得

$$M+2at \equiv 0 \mod p,$$

而因爲 p 是奇質數且 $p \nmid a$，這樣的 t 必然存在。以上便說明了存在 a 與 b 使得 p^{k+1} 整除 a^2+b^2+1，從而完成證明。

問題五. 證明：對於滿足 $a_1^2+a_2^2+...+a_{400}^2=1$ 的實數 $a_1,a_2,...,a_{400}$，必存在正整數 $m\le 10$, 使得我們可以從中找到 m 個 $a_{i_1},...,a_{i_m}$（$1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le 400$），並適當選取 $b_1,...,b_m\in\{-1,1\}$，使滿足

$$|a_{i_1}b_1+a_{i_2}b_2+\cdots+a_{i_m}b_m|<\frac{1}{2026}.$$

解. 我們可適當選取 $b_i\in\{-1,1\}$ 來調整 $a_ib_i=\pm|a_i|$。因此，不失一般性，可假設 $0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_{400}$.

對於 $c_i\in\{0,1\}$，由柯西不等式可得到

$$\begin{aligned}0\le a_1c_1+\cdots+a_{10}c_{10}\le&\sqrt{(a_1^2+\cdots+a_{10}^2)(c_1^2+\cdots+c_{10}^2)}\\ \le&\sqrt{\frac{1}{4}(a_1^2+\cdots+a_{400}^2)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

在這裡用到遞增數列的一個基本性質：$\frac{a_1^2+\cdots+a_{10}^2}{10}\le\frac{a_1^2+\cdots+a_{400}^2}{400}$.

注意到共有 2^{10} 種線性組合 $a_1c_1+\cdots+a_{10}c_{10}$. 將區間 $[0,\frac{1}{2}]$ 等分割成 $2^{10}-1$ 個子區間，由鴿籠原理知，其中存在兩個 $a_1c_1^*+\cdots+a_{10}c_{10}^*$ 及 $a_1c_{1,*}+\cdots+a_{10}c_{10,*}$ 落在同一個子區間，其中 $(c_1^*,....,c_{10}^*)\ne(c_{1,*},...,c_{10,*})$。我們得到

$$|a_1(c_1^*-c_{1,*})+\cdots+a_{10}(c_{10}^*-c_{10,*})|\le\frac{1}{2(2^{10}-1)}<\frac{1}{2026}.$$

最後，令 $b_i:=c_i^*-c_{i,*}\in\{-1,0,1\}$，並注意到 $b_1,...,b_{10}$ 不全為零, 故由上式得證。