

2026 年台灣數學奧林匹亞考試試題詳解

問題一. 給定實數 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 以及 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ 。證明：對於 $1, 2, \dots, n$ 的任意重排 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ ，都有

$$\sum_{i=1}^n \min(a_{\pi_i}, b_i) \leq \sum_{i=1}^n \min(a_i, b_i).$$

註. $\min(x, y)$ 指的是 x, y 兩數之中的較小者。

解. 採用「調整法」。我們將證明若重排中存在「逆序對」，那麼交換這一對元素將不會減少總和。由此，經過有限次的交換後，我們可以把 π 調整為恰好是由小到大排序的重排，而此時總和最大。

Base Case: $n = 2$.

對於 $a_1 \leq a_2$ 及 $b_1 \leq b_2$ ，定義

$$S = \min(a_1, b_2) + \min(a_2, b_1), \quad T = \min(a_1, b_1) + \min(a_2, b_2)$$

我們要證明 $S \leq T$ 。WLOG $a_1 \leq b_1$ ，此時分三種情況討論：

- $a_1 \leq a_2 \leq b_1 \leq b_2$ ：此時 $S = a_1 + a_2 = T$ ；
- $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2$ ：此時 $S = a_1 + b_1 \leq a_1 + a_2 = T$ ；
- $a_1 \leq b_1 \leq b_2 \leq a_2$ ：此時 $S = a_1 + b_1 \leq a_1 + b_2 = T$ 。

因此 $S \leq T$ ，也就是將逆序對交換後總和不減。

General Case: $n \geq 2$.

假設存在 $\pi(i) \neq i$ ，則 WLOG 假設有 $j > i$ 使得 $\pi_j < \pi_i$ 。定義新的排列 π' 為將 π 中 π_i 與 π_j 交換得到的排列，即

$$\pi'_i = \pi_j, \quad \pi'_j = \pi_i, \quad \pi'_k = \pi_k \quad (\forall k \neq i, j).$$

考慮交換前後的總和變化，由前面的 **Base Case** 討論可知將 π 改為 π' 後總和不會減少，使用調整法證明不等式依然成立。因此，經過有限次交換後，我們可得 $1, 2, \dots, n$ 的排序，此時總和最大。由此可知對任意排列 π ，均滿足

$$\sum_{i=1}^n \min(a_{\pi_i}, b_{\pi_i}) \leq \sum_{i=1}^n \min(a_i, b_i).$$

問題二. 設 $\triangle ABC$ 內接於圓 ω , M 為邊 BC 的中點。設 P 為圓 ω 上通過 M 且垂直於 AC 的弦之中點；設 Q 為圓 ω 上通過 M 且垂直於 AB 的弦之中點。證明： $PQ \perp AO$, 其中 O 為圓 ω 的圓心。

解. Let H be the orthocenter of triangle ABC . Let E and F be the midpoints of HC and HB , respectively. Let N be the circumcenter of triangle MEF , which is also the nine-point center of triangle ABC . According to a well-known property, $AO \parallel NM$. We will prove that $MN \perp PQ$.

Since $MP \perp AC$, it follows that $MP \parallel HB$. By the midline property, MP passes through the midpoint E of HC . Similarly, MQ passes through the midpoint F of HB . Since N is the circumcenter of triangle MEF , it is straightforward to show that $MN \perp PQ$. We will now prove that quadrilateral $PEQF$ is cyclic.

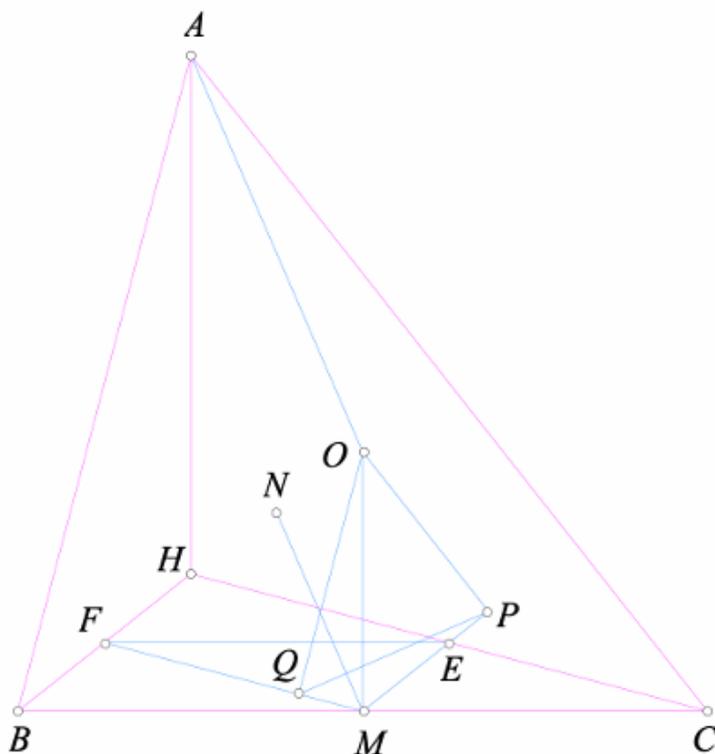
Indeed, we have

$$\angle MPO + \angle MQO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

implying that quadrilateral $OPMQ$ is cyclic. Therefore,

$$\angle MPQ = \angle MOQ = \angle MFE.$$

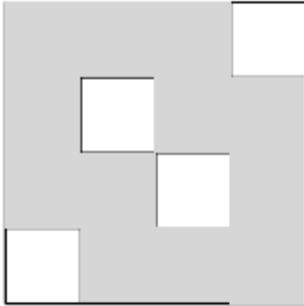
The equality of the last angles is due to the fact that $\angle MOQ$ and $\angle MFE$ are corresponding angles with respect to perpendicular sides. Hence, quadrilateral $PEQF$ is cyclic. Combining these arguments with the initial setup, we have completed the proof.



問題三. 寶寶將一張 2026×2026 格的方格紙上的 2026 格各塗成紅色或黃色，使得任兩個塗成同色的格子都不會在同一行或同一列。路過的奶爸一看，發現方格紙上沒被塗色的部分可以被沿著格線剪成若干個 1×2 的小方格紙。試證明紅色格子數的最大可能值為 2025 。

解. 讓我們證明：對於 $n \equiv 2 \pmod{4}$ ，在 $n \times n$ 的方格紙最多能有 $n - 1$ 個紅格。

首先證明 $n - 1$ 是可行的。注意到 4×4 的棋盤可以用以下方式露出不同行不同列的四格：



這表示對於 $n = 4k + 2$ ，我們可以考慮以下擺法：

- 將左上角 $4k \times 4k$ 的棋盤切成 $k \times k$ 個 4×4 棋盤，對角線上的 k 個 4×4 棋盤都用以上方式擺放，其餘的 4×4 都直接擺滿。
- 將左下角的 $2 \times 4k$ 全部擺滿
- 將右邊數來倒數第二直排全部擺滿
- 將右邊數來倒數第一排的中間 $4k$ 格擺滿，露出最上面和最下面一格。

易檢驗以上擺法共露出 n 格，且其中除了最右上角的一格外都不同列不同行，故 $N = n - 1$ 。

以下證明 $N \neq n$ 。將棋盤進行黑白塗色，其中 $(1, 1)$ 為白格。注意到每一個 1×2 骨牌都蓋住一黑一白，因此沒蓋住的 n 格 $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ，必然是 $2k + 1$ 個黑格以及 $2k + 1$ 的白格，也就是說恰有 $2k + 1$ 組 (x_i, y_i) 的奇偶性相同，因此

$$\sum_{i=1}^{2k+1} x_i - y_i \equiv 2k + 1 \equiv 1 \pmod{2}$$

但同時，如果這 n 格都不同列不同行，表示 x_i 與 y_i 皆為 1 到 n 的重排，因此

$$\sum_{i=1}^{2k+1} x_i - y_i = 0 \pmod{2}$$

矛盾！因此這 N 格不可能都不同行不同列。

問題四. 記 $\mathbb{Q}_{(0,1)}$ 為滿足 $0 < q < 1$ 之所有有理數 q 所成集合。遊戲開始時，黑板上寫有一最簡分數 $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}_{(0,1)}$ 。每一回合，對於黑板上的最簡分數 $\frac{b}{a}$ ，晴晴會先找出讓 $a+k$ 與 $b+k$ 不互質的最小正整數 k ：

- 若找不到這樣的 k ，則遊戲在該回合結束。
- 否則，將黑板上的最簡分數 $\frac{b}{a}$ 改寫成 $\frac{b+k}{a+k}$ 化為最簡分數的形式，然後進入下一回合。

對於所有 $q \in \mathbb{Q}_{(0,1)}$ ，試求所有讓遊戲在有限回合內結束，且結束時黑板上數字恰為 q 的起始數字 $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}_{(0,1)}$ 。

解. 定義有理數集合 $S = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ 。以下證明：若 q 不在 S 中，則 q 不可能為黑板上最後留下的數；而對任一個 $q = \frac{n}{n+1} \in S$ ，所有可能的初始數字為滿足 $\frac{n-1}{n} < \frac{b}{a} \leq \frac{n}{n+1}$ 的最簡分數 $\frac{b}{a}$ 。

顯然 S 中的元素無法進行操作（因為 $\frac{n}{n+1} \in S$ ， $\gcd(n+k, n+1+k) = 1$ 對於任意 $k \in \mathbb{N}$ 均成立）。而對於最簡分數 $\frac{b}{a} \in (0, 1) \setminus S$ ，必有 $a - b > 1$ ，且存在唯一非負整數 n 滿足 $\frac{n}{n+1} < \frac{b}{a} < \frac{n+1}{n+2}$ 。注意到 $k^* = (n+1)a - (n+2)b$ 為滿足 $\gcd(a+k^*, b+k^*) = a-b > 1$ 之正整數，因此 $\frac{b}{a}$ 可進行操作。

易知 $\frac{b}{a} < \frac{a+k}{b+k} \leq \frac{b+k^*}{a+k^*} = \frac{n+1}{n+2}$ ，因此 $\frac{b}{a}$ 每次操作後嚴格遞增，但始終不會超過 $\frac{n+1}{n+2}$ 。且因 $a+k \leq a+k^* = (n+2)a - (n+2)b < (n+2)a - (n+2)\frac{n}{n+1} = \frac{(n+2)a}{n+1} \leq 2a$ ，故 $\frac{b+k}{a+k}$ 化為最簡分數後的分母不超過 $\frac{a+k}{2} < a$ ，因此每次操作後的分母嚴格遞減，所以操作只能進行有限次。綜上，對於任意初始最簡分數 $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}_{(0,1)}$ ，都會在有限次操作後停止，並得到 S 中不小於 $\frac{b}{a}$ 的最小元素。

問題五. 設 S 為 xy 坐標平面上的 100 個點所成集合。以 S 中相異四個點為頂點的長方形中，那些四邊皆平行於坐標軸之長方形的個數記為 N 。試求 N 的最大可能值。

解. The answer is 2025. We first give a construction that attains this bound. Let S be the set $\{(i, j) : i, j = 1, 2, \dots, 10\}$. Then the number of such rectangles is $C_2^{10} \times C_2^{10} = 45 \times 45 = 2025$.

We next proceed to show that this is optimal. Consider a graph G with vertex set S , and $u \sim v$ if and only if there is a rectangle $ABCD$ satisfying the condition with $A = u$ and $C = v$. Since each rectangle corresponds to two edges in the graph, and no two rectangles share any edges, we know that it suffices to show that $|E(G)| \leq 2 \times 2025 = 4050$. In fact, we can show that each vertex has degree at most 81. If this is done, then $|E(G)| \leq 100 \times 81/2 = 4050$.

To show this, let u_x and u_y each denote the x and y coordinates of the point u , respectively. Then, for each point $v \in S$, consider the sets $X_v := \{u \in S | u \neq v, u_x = v_x\}$ and $Y_v := \{u \in S | u \neq v, u_y = v_y\}$. Let $|X_v| = x$, $|Y_v| = y$. Also, let $N(v)$ be the points incident to v . Then it is clear that $|N(v)| \leq 100 - 1 - x - y = 99 - x - y$. Also note that for every $p \in N(v)$, there exists a unique $(u_p, w_p) \in X_v \times Y_v$ such that pu_pvw_p is a rectangle with sides parallel to the axes. It is also clear that $p \rightarrow (u_p, w_p)$ is an injection, showing that $|N(v)| \leq xy$. Thus,

$$\deg(v) = |N(v)| \leq \min(99 - x - y, xy).$$

The RHS is maximized when $x = y = 9$, giving $\deg(v) \leq 81$, as desired.

Remark. This solution actually works even when 100 is replaced with any $n(n+1)$ (in which case the answer is $n^2(n^2-1)/4$) and any n^2 (in which case the answer is $n^2(n-1)^2/4$).